Über die Behandlung von Diagnoseproblemen mit Mitteln der mathematischen Logik

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Horst Federmutz
aus Brüsau

1981

1980

Über die Behandlung von Diagnoseproblemen mit Mitteln der mathematischen Logik

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Horst Federmutz
aus Brüsau

1981

Tag der mündlichen Prüfung:	19. Dezember 1980
Dekan:	Prof. Dr. R. Hübener
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. M. Dal Cin
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. W. Güttinger

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Grundlagen aus der Logik	9
2. Syndrome und Lösungen	20
3. Erfüllbarkeit von Syndromen, Existenz von Lösungen	29
4. Ableiten von Lösungen	39
5. Über die Struktur von Lösungen	49
6. Anwendungen	60
Nachwort	80
Literaturverzeichnis	82

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548921_0045

Einleitung

In dieser Arbeit wird beschrieben, wie mit Mitteln der mathematischen Logik "Diagnoseprobleme" behandelt werden können, wie zum Beispiel folgendes: Gegeben seien endlich viele Einheiten. Über jede Einheit B kann von einer Einheit A eine Aussage getroffen werden der Art "B ist zuverlässig" oder "B ist nicht zuverlässig". Die von A getroffene Aussage braucht nicht verläßlich zu sein, da die Einheit A selbst unzuverlässig sein kann. Aus einer solchen Menge von Aussagen, die von Einheiten übereinander gemacht werden und deren Verläßlichkeit nicht bekannt ist, sind verläßliche Aussagen über mögliche Zustände "unzuverlässig" oder "zuverlässig" der gegebenen Einheiten zu gewinnen.

Solche Diagnoseprobleme sind aktuell bei Mehrprozessorsystemen, bei denen innerhalb eines Systems Prozessoren und andere Einheiten von Prozessoren auf Fehlerfreiheit, d.h. einwandfreies Funktionieren, getestet werden können, zum Beispiel durch Testprogramme, wobei ein nicht fehlerfrei funktionierender Prozessor natürlich keine verläßliche Aussage liefert.

Derartige "sich selbst testende" Systeme werden bei F.P. Preparata, G. Metze und R.T. Chien 1967 durch gerichtete Graphen mit Bewertungen ihrer Kanten beschrieben etwa wie folgt: Wenn zum Beispiel die Einheit A die Einheit B "testet", so wird dies dargestellt durch eine Kante <A,B>. Wenn die Aussage von A über B die Fehlerhaftigkeit von B beinhaltet, dann wird die "Testverbindung" <A,B> mit 0 bewertet. Wenn die Aussage von A über B die Fehlerfreiheit von B beinhaltet, wird <A,B> mit 1 bewertet.

Bei einem solchen "Testgraphen" sind dann (unter anderem) Bewertungen der Einheiten mit "fehlerhaft" oder "nicht fehlerhaft" gesucht, welche eine gegebene Bewertung der Testverbin-

dungen mit 0 oder 1 hervorbringen können. Es leuchtet ein, daß es mehrere solcher "Diagnosen", d.h. Bewertungen der Einheiten mit "fehlerhaft" oder "nicht fehlerhaft", zu einem "Syndrom", d.h. zu einer Bewertung der Testverbindungen mit 0 oder 1, geben kann. Denn zum Beispiel können (im extremen Fall) alle Einheiten des Systems fehlerhaft sein. Dann ist jedes Syndrom möglich, da anzunehmen ist, daß eine fehlerhafte Einheit A die Fehlerfreiheit oder die Fehlerhaftigkeit einer Einheit B behaupten kann, gleich in welchem Zustand B wirklich ist. Man vergleiche auch M. Dal Cin 1979.

Man kann sich nun vorstellen, daß zum Beispiel eine Einheit B von mehreren anderen Einheiten A_0, ..., A_{n-1} getestet wird und B nur dann mit "Sicherheit" als fehlerfrei gelten soll, wenn dies von allen Einheiten A_0, ..., A_{n-1} verläßlich festgestellt wird. Solche Situationen lassen sich mittels Erweiterungen der "Preparata-Modelle" beschreiben, wie dies bei M. Adham und A. Friedman 1977 behandelt wird. Statt einzelne Kanten des Testgraphen mit 0 oder 1 zu bewerten, werden diese oder Mengen von Kanten mit Booleschen Gleichungen bewertet. Zum Beispiel die Kantenmenge $\{\langle A_0,B\rangle,\ldots,\langle A_{n-1},B\rangle\}$ mit der Gleichung $b(A_0) \sqcup \ldots \sqcup b(A_{n-1}) \sqcup -b(B) = 1$, wobei b eine Abbildung von der Menge der Einheiten in eine zweielementige Boolesche Algebra, $\sqcup$ die Boolesche Vereinigung und $-$ das Boolesche Komplement sei. Für jede Einheit A wird $b(A) = 1$ gedeutet als "A ist fehlerhaft" und $b(A) = 0$, also $-b(A) = 1$, als "A ist nicht fehlerhaft". Nur wenn $b(A_0) = \ldots = b(A_{n-1}) = 0$ ist, die Einheiten A_0, ..., A_{n-1} also nicht fehlerhaft sind, muß $-b(B) = 1$, also $b(B) = 0$, also die Einheit B fehlerfrei sein. Wenn $b(A_i) = 1$ für ein A_i, so kann $b(B) = 1$ sein und $b(A_0) \sqcup \ldots \sqcup b(A_{n-1}) \sqcup -b(B) = 1$ gelten. "Syndrome" sind bei solchen "Adham-Friedman-Modellen" also Mengen von Booleschen Gleichungen, deren Lösungen dann Auskunft über mögliche Fehlerzustände der Einheiten geben, also mögliche "Diagnosen" sind. Man vergleiche auch M. Dal Cin 1979.

Hier in dieser Arbeit wird nun eine Methode der Behandlung von

"Testproblemen" dargestellt, die sich auch für die Behandlung von Diagnoseproblemen anderer Art eignet.

Dabei werden den Kanten eines Testgraphen oder Mengen seiner Kanten die in einer geeigneten logischen Sprache formulierten Aussagen zugeordnet, die die vorliegenden Fehlersituationen beschreiben. Zum Beispiel wird der Kante <A,B> zugeordnet entweder die Aussage $\neg Feh(A) \rightarrow Feh(B)$ oder $\neg Feh(A) \rightarrow \neg Feh(B)$. Für jede Einheit A soll dabei Feh(A) bedeuten "A ist fehlerhaft". Mit $\neg$ als Negation und $\rightarrow$ als Implikation bedeutet $\neg Feh(A)$ also "A ist nicht fehlerhaft", $\neg Feh(A) \rightarrow Feh(B)$ also "wenn A nicht fehlerhaft, dann ist B fehlerhaft" und $\neg Feh(A) \rightarrow \neg Feh(B)$ also "wenn A nicht fehlerhaft, dann ist B nicht fehlerhaft". Dabei besagt die Gültigkeit der Aussage $\neg Feh(A) \rightarrow Feh(B)$, daß B nur dann mit Sicherheit fehlerhaft ist, wenn A nicht fehlerhaft ist. Die Gültigkeit von $\neg Feh(A) \rightarrow \neg Feh(B)$ besagt, daß B nur dann mit Sicherheit nicht fehlerhaft ist, wenn A nicht fehlerhaft ist. Die Bedingung, daß B nur dann mit Sicherheit als fehlerfrei gelten soll, wenn dies von allen Einheiten $A_0, \ldots, A_{n-1}$ verläßlich festgestellt wird, ist mit $\wedge$ als Konjunktion durch die Aussage $(\neg Feh(A_0) \wedge \ldots \wedge \neg Feh(A_{n-1})) \rightarrow \neg Feh(B)$ beschreibbar, die also bedeutet "wenn A_0 und ... und A_{n-1} nicht fehlerhaft, dann ist B nicht fehlerhaft".

Diese Art der Beschreibung von Fehlersituationen durch logische Formeln zeichnet sich dadurch aus, daß vorliegende Situationen unmittelbar in geeignete Formeln übersetzt werden können und alle für eine "Diagnose" notwendigen Informationen in der Formelmenge, die die Fehlersituation beschreibt, dem "logischen Syndrom", enhalten ist.

Mit logischen Syndromen, d.h. mit Formelmengen, können natürlich auch Situationen beschrieben werden, die von anderer Art als Fehlersituationen sind.

Als "Diagnose" eines solchen logischen Syndroms S, im folgenden auch "Lösung von S" genannt, kann jede Menge L von ato-

maren oder negierten atomaren Formeln angesehen werden mit folgenden Eigenschaften: die Menge der in L "vorkommenden" Atomformeln ist gleich der Menge der in S "vorkommenden" Atomformeln und L zusammen mit S, d.h. L vereinigt mit S ist gültig.

Bei Fehlersituationsbeschreibungen wie zuletzt oben sind die Diagnosen oder Lösungen dann Mengen von Formeln der Art Feh(A) oder ¬Feh(A), die Auskunft geben über mögliche Fehlerzustände der Einheiten A. Zum Beispiel sind {¬Feh(A),Feh(B),¬Feh(C)} und {¬Feh(A),Feh(B),Feh(C)} Lösungen des logischen Syndroms {¬Feh(A) → Feh(B),¬Feh(B) → ¬Feh(C),¬Feh(C) → ¬Feh(A)}. Bei anderen Diagnoseproblemen können die Diagnosen natürlich auch Formeln zum Beispiel der Art P(A), Q(A) oder R(A,B) enthalten, wobei P und Q "einstellige Prädikate", R "zweistelliges Prädikat" und A und B Einheiten eines Systems sind.

Für die Untersuchung logischer Syndrome und für ihre Auswertung, zum Beispiel für die Gewinnung von Diagnosen, stehen Mittel der mathematischen Logik zur Verfügung. Die Herleitung von Diagnosen aus logischen Syndromen z.B. kann mit besonderen "logischen" Kalkülen geschehen.

Beachtenswert bei dieser Methode der Behandlung von Diagnoseproblemen ist, daß Situationen der verschiedensten Art vollständig durch Mengen geeigneter logischer Formeln beschrieben und diese Formelmengen dann unabhängig von anderen Strukturen untersucht und ausgewertet werden können.

In dieser Arbeit werden zuerst, in den Abschnitten 1 bis 5, themawichtige mathematische Mittel und Strukturen beschrieben und untersucht und dann, im Abschnitt 6, Möglichkeiten für die Anwendung des in den vorhergehenden Abschnitten Dargestellten im Bereich der "computer science" aufgezeigt.

In Abschnitt 1 werden hauptsächlich mit Mitteln der allgemeinen Algebra elementare Begriffe aus der mathematischen Logik eingeführt. Außerdem werden einige später benötigte Hilfsmittel erklärt. Ausführliches zur allgemeinen Algebra findet man

zum Beispiel bei R.S. Pierce 1968, zur mathematischen Logik bei M.M. Richter 1978, bei D. Hilbert und W. Ackermann 1972 und bei H. Hermes 1976.

In Abschnitt 2 werden Begriffe eingeführt, die grundlegend für diese Arbeit sind. Unter anderem werden die schon erwähnten Begriffe "(logisches) Syndrom" und "Diagnose oder Lösung eines Syndroms" präzisiert. Es wird auf Syndrome hingewiesen, die "normal" genannt werden und die einige für ihre Untersuchung und Auswertung günstige Eigenschaften haben. Unter anderem wird erwähnt, wie aus jedem endlichen Syndrom S (im wesentlichen) mittels eines Kalküls ein normales Syndrom S' gewonnen werden kann, so daß S und S' die gleichen Lösungen haben. Dabei ist hier und im folgenden mit "gewinnen, bestimmen oder ähnlichem mittels eines Kalküls" gemeint, daß dies tatsächlich, also in endlicher Zeit, d.h. in endlich vielen Schritten geschehen kann.

In Abschnitt 3 wird ein Kalkül angegeben, mit dem festgestellt werden kann, ob ein endliches normales Syndrom eine Lösung hat (oder keine Lösung hat), und der auch in den Abschnitten 4 und 5 von Bedeutung ist. Die Grundlage für diesen Kalkül ist das "Resolutionsprinzip", das bei J.A. Robinson 1965 und zum Beispiel bei C.L. Chang und R.C.T. Lee 1973 beschrieben wird.

In Abschnitt 4 wird ein Kalkül erklärt, mit dem alle Lösungen eines endlichen normalen Syndroms S und alle Formelmengen einer bestimmten Art, "Lösungskerne von S" genannt, die sich in einfacher Weise zu Lösungen von S erweitern lassen, gewonnen werden können. Es wird dann ein Teil dieses Kalküls angegeben, mit dem sich ebenfalls alle Lösungen und Lösungskerne von S gewinnen lassen, mit dem aber alle nichttrivialen Ableitungen vermieden werden, die sich nicht bis zur Gewinnung einer Lösung oder eines Lösungskerns von S "fortsetzen" lassen. Außerdem erlaubt dieser Teilkalkül zu prüfen, ob eine beliebige endliche Menge von Atomformeln oder negierten Atomformeln Teil einer Lösung von S ist.

In Abschnitt 5 wird gezeigt, daß es zu jedem Syndrom S eine

Äquivalenzrelation $=_S$ gibt, so daß jede Lösung von S Vereinigung von Äquivalenzklassen von $=_S$ ist und verschiedene Lösungen von S sich (nur) durch "Komplemente" von solchen Äquivalenzklassen unterscheiden. Unter den Äquivalenzklassen von $=_S$ kann es eine geben, die insofern ausgezeichnet ist, als daß ihre Elemente in allen Lösungen von S vorkommen. Es wird ein Kalkül angegeben, mit dem zu jedem endlichen normalen Syndrom S, das eine Lösung hat, diese ausgezeichnete Klasse gefunden werden kann, falls sie existiert, und mit dem sich auch alle anderen Äquivalenzklassen von $=_S$ bestimmen lassen. Die Kenntnis der Äquivalenzklassen von $=_S$ kann zum Beispiel verwendet werden bei der Gewinnung von Lösungen von S.

Die im Abschnitt 6 aufgezeigten Ansätze für die Anwendung des in den vorhergehenden Abschnitten Dargestellten sind besonders von Bedeutung für zwei Problemkreise.

Einmal ist, durch die neue Hardware-Technologie, die Realisierung von "Vielprozessorsystemen" in greifbare Nähe gerückt und damit auch die damit verknüpften Probleme der Steuerung und Verwaltung des Betriebs solcher Systeme. Zu diesen Steuerungs- und Verwaltungsaufgaben kann auch das "Sichselbsttesten" auf Funktionsfähigkeit, d.h. ein vom System bei sich selbst durchführbares Fehlerentdecken und eventuell Fehlerbeseitigen, gehören und notwendig sein. Besonders wichtig bei Vielprozessorsystemen ist sicher die Parallelisierung von Abläufen und die Organisation der Inanspruchnahme von "Betriebsmitteln", zum Beispiel die Organisation der Kommunikation von Prozessoren untereinander. Man vergleiche hierzu auch A.D. Friedman und L. Simoncini 1980. Zu bei Betriebssystemen auftretenden Problemen und Möglichkeiten ihrer Behandlung vergleiche man zum Beispiel L. Richter 1977 und H. Zima 1976.

Ein zweiter besonders aktueller Problemkreis ergibt sich aus der Forderung nach zuverlässiger Software. Ähnlich einer "automatisierten" Fehlerentdeckung in einem Prozessorsystem ist eine

solche auch in einem Software-System denkbar. Genutzt werden könnte sie, realisiert mittels besonderer "Fehlerentdeckungsmoduln", während der Entwicklungsphase des Systems und auch danach, z.B. bei Änderungen oder Erweiterungen oder während des Betriebs zu seiner Überwachung.

In Abschnitt 6 werden vier Möglichkeiten für die Anwendung des in den Abschnitten 2, 3, 4 und 5 Dargestellten aufgezeigt.

Als erstes werden sich selbst testende Systeme behandelt. Es wird angenommen, daß jede Einheit eines derartigen Systems, z.B. eines Prozessorsystems, von Einheiten des gleichen Systems auf Funktionsfähigkeit getestet werden kann. Gezeigt wird, wie aus "Testsituationen", die "beliebig" komplex sein können, Testbedingungen und Testergebnissen mittels geeigneter Beschreibung durch logische Syndrome, die dann die Anwendung der in den vorhergehenden Abschnitten erklärten Kalküle erlaubt, Aussagen über mögliche defekte Einheiten zu erhalten sind.

Als zweites wird gezeigt, wie Probleme der Parallelisierung von Aktivitäten von Einheiten, z.B. von Prozessen, behandelt werden können. Jede Einheit soll aktiv oder nicht aktiv sein können. Bekannt seien die gegenseitigen Abhängigkeiten der Aktivitäten, zum Beispiel ob zwei Einheiten nicht gleichzeitig aktiv sein dürfen oder ob sie gleichzeitig aktiv sein müssen. Gezeigt wird, wie aus derartigen "beliebig" komplexen "Aktivitätsbedingungen" mittels geeigneter Beschreibung durch logische Syndrome Aussagen über mögliche gleichzeitige Aktivitäten zu gewinnen sind.

Als drittes werden Systeme von Einheiten behandelt, in denen Einheiten andere Einheiten belegen können. Dies können z.B. Prozessorsysteme sein. Bekannt seien die gegenseitigen Abhängigkeiten von Belegungsansprüchen oder Belegungseinschränkungen, zum Beispiel ob die Belegung einer Einheit Belegungen oder Einschränkungen von Belegungsmöglichkeiten einer anderen Einheit zur Folge hat. Gezeigt wird, wie aus solchen "beliebig" kom-

plexen "Belegungsbedingungen" mittels geeigneter Beschreibung durch logische Syndrome Auskunft über mögliche gleichzeitige Belegungen zu erhalten ist.

Als viertes werden Systeme von Einheiten behandelt, in denen sich Fehler von Einheit zu Einheit fortpflanzen und von testenden Einheiten entdeckt werden können, wobei das Auftreten eines Fehlers bei einer Einheit nicht die Defektheit dieser Einheit bedeuten soll. Dies können z.B. Prozessorsysteme oder Software-Systeme sein. Gezeigt wird, wie aus "Fehlerflußsituationen", die "beliebig" komplex sein können, und aus Testergebnissen mittels Beschreibung durch logische Syndrome Aussagen über mögliche defekte Einheiten zu erhalten sind.

Die Beispiele in dieser Arbeit sollen der Erläuterung von Begriffen, der Veranschaulichung von Ergebnissen von Sätzen und zur Vorführung von Anwendungsmöglichkeiten dienen. Sie sind deshalb einfach gehalten und geben sicher nicht die Komplexität wieder, die wohl bei den in der Praxis auftretenden Diagnoseproblemen, z.B. bei den in Abschnitt 6 beschriebenen, zu bewältigen ist.

Im Nachwort werden Überlegungen über Untersuchungen angestellt, die sich an diese Arbeit, einmal an die Abschnitte 1 bis 5, zum anderen an den Abschnitt 6, die Anwendung betreffend, anschließen könnten und sollten.

1. Grundlagen aus der Logik

Dieser Abschnitt enthält im wesentlichen eine Zusammenstellung elementarer Begriffe und Sachverhalte aus der mathematischen Logik. Die logischen Begriffe werden dabei hauptsächlich mit zu Anfang angegebenen algebraischen Mitteln eingeführt (wie man es zum Beispiel bei M.M. Richter 1978 findet). Daneben werden noch einige später benötigte Hilfsmittel erklärt.

Eine n-stellige Operation auf einer Menge E sei eine Abbildung von E^n in E.

E^n sei dabei die Menge aller Folgen der Länge n von Elementen aus E. Es sei $n = \{0,1,\ldots,n-1\}$ und die natürliche Zahl 0 die leere Menge. Eine Folge g sei eine Abbildung auf ihrem Indexbereich I. Für g wird dabei auch

$$\langle g_i \rangle_{i \in I}$$

geschrieben, wobei g_i das Bild $g(i)$ von i unter g sei für alle $i \in I$. Falls $I = n$ für eine natürliche Zahl n, so wird auch

$$\langle g_i \rangle_{i<n}$$

oder

$$\langle g_0,\ldots,g_{n-1} \rangle$$

oder auch nur

$$g_0,\ldots,g_{n-1}$$

für g geschrieben. Man beachte, daß E^0 die Menge aller Abbildungen von $\emptyset$ in E, also gleich $\{\emptyset\}$ ist.

$A = \langle A_0, \langle f_i \rangle_{i \in I} \rangle$ heiße Algebra vom Typ $\langle n_i \rangle_{i \in I}$, falls

(1) jedes n_i eine natürliche Zahl (eventuell gleich 0) und

(2) f_i eine n_i-stellige Operation auf A_0 für alle $i \in I$ ist.

Die Algebra A heiße erzeugt von X, falls gilt:

(1) $X \subseteq A_0$.

(2) Wenn $X \subseteq Y \subseteq A_0$ und für alle $a \in Y^{n_i}$ gilt $f_i(a) \in Y$ für alle $i \in I$, dann ist $A_0 \subseteq Y$.

Wenn $B = \langle B_0, \langle g_i \rangle_{i \in I} \rangle$ eine weitere Algebra vom Typ $\langle n_i \rangle_{i \in I}$, so heiße eine Abbildung h von A_0 in B_0 Homomorphismus von A in B, falls $h(f_i(a)) = g_i(h \circ a)$ für alle $i \in I$ und alle $a \in A_0^{n_i}$ ist.

$h \circ a$ sei dabei die Hintereinanderausführung von a und h, also die Menge aller $\langle x,z \rangle$, für die ein y existiert, so daß $\langle x,y \rangle \in a$ und $\langle y,z \rangle \in h$ ist. Falls $n_i > 0$, so ist also $h \circ a = \langle h(a_0), \ldots, h(a_{n_i-1}) \rangle$.

Ein Homomorphismus h von A in B heiße Isomorphismus von A in B, falls h eine Bijektion von A_0 auf B_0 ist.

Sei $A = \langle A_0, \langle f_i \rangle_{i \in I} \rangle$ Algebra vom Typ $\langle n_i \rangle_{i \in I}$.

A heiße Peano-Algebra über X, falls

(1) A von X erzeugt wird,

(2) $X \cap \mathrm{im}(f_i) = \emptyset$ für alle $i \in I$ und

(3) aus $f_i(a) = f_j(b)$ folgt $i = j$ und $a = b$ für alle $i, j \in I$ und alle $a \in A_0^{n_i}$ und alle $b \in A_0^{n_j}$.

$\mathrm{im}(f_i)$ sei dabei der Bildbereich der Abbildung f_i.

Punkt(3) ist äquivalent zu

(3') f_i ist injektiv für alle $i \in I$ und $\mathrm{im}(f_i) \cap \mathrm{im}(f_j) = \emptyset$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

A heiße absolut frei über X, falls

(1) A von X erzeugt wird und

(2) jede Abbildung h_0 von X in die "Grundmenge" B_0 einer Algebra

$B = \langle B_0, \langle g_i \rangle_{i \in I} \rangle$ vom Typ $\langle n_i \rangle_{i \in I}$ zu genau einem Homomorphismus von A in B fortgesetzt werden kann.

Für Peano-Algebren und absolut freie Algebren gelten (man vergleiche zum Beispiel M.M. Richter 1978) die folgenden Aussagen:

Eine Algebra A ist absolut frei über X genau dann, wenn A Peano-Algebra über X ist.

Zu jeder Menge X und jeder Folge natürlicher Zahlen $\langle n_i \rangle_{i \in I}$ existiert eine absolut freie Algebra über X vom Typ $\langle n_i \rangle_{i \in I}$ und damit eine Peano-Algebra über X dieses Typs.

Die absolut freien Algebren über X vom Typ $\langle n_i \rangle_{i \in I}$ und damit die Peano-Algebren über X dieses Typs sind bis auf Isomorphie eindeutig durch X und $\langle n_i \rangle_{i \in I}$ bestimmt.

Ein Beispiel für eine Peano-Algebra und absolut freie Algebra über X vom Typ $\langle n_i \rangle_{i \in I}$ ist die im folgenden konstruierte "Zeichenreihenalgebra":

Sei $\langle f_i \rangle_{i \in I}$ eine Folge von "Operationszeichen" mit $f_i \neq f_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ und mit $f_i \notin X$ für alle $i \in I$. Induktiv erklärt sei dann eine Folge $\langle Z_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ sei die Menge der natürlichen Zahlen, durch

$$Z_0 = X$$

und für $n > 0$ durch

$$Z_n = \{\langle f_i, a \rangle \mid i \in I \text{ und } a \in (Z_{n-1})^{n_i}\} \cup Z_{n-1}.$$

Sei

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$$

und sei g_i eine n_i-stellige Operation auf E für alle $i \in I$ mit

$$g_i(a) = \langle f_i, a \rangle$$

für alle $a \in E^{n_i}$. Dann ist $\langle E, \langle g_i \rangle_{i \in I} \rangle$ Peano-Algebra über X vom Typ $\langle n_i \rangle_{i \in I}$.

Peano-Algebren und absolut freie Algebren können also mit "anschaulichen" Zeichenreihenalgebren identifiziert werden.

Eine absolut freie Algebra Fm = <fm,∧,∨,→,¬> vom Typ <2,2,2,1> über einer abzählbaren Menge At heiße (aussagenlogische) Formelalgebra (über At), die Elemente von fm heißen Formeln, ∧ heiße Konjunktion, ∨ Disjunktion, → Implikation und ¬ Negation, die Elemente von At heißen Atomformeln.

Man beachte, daß die Folge der Teilmengen von fm, die der bei der vorhergehenden Konstruktion der Zeichenreihenalgebra benutzten Folge $\langle Z_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ entspricht, zum induktiven Definieren verwendet werden kann.

Für Formeln aus fm sei induktiv definiert

$$sub(A) = \{A\}$$

für Atomformeln A und

$$sub(a \wedge b) = sub(a) \cup sub(b) \cup \{a \wedge b\},$$

$$sub(a \vee b) = sub(a) \cup sub(b) \cup \{a \vee b\},$$

$$sub(a \to b) = sub(a) \cup sub(b) \cup \{a \to b\},$$

$$sub(\neg a) = sub(a) \cup \{\neg a\}$$

für Formeln a und b, für die sub schon definiert ist. Die Elemente von sub(a) heißen Subformeln von a für jede Formel a.

Wenn zum Beispiel $a = ((A \to B) \vee \neg C) \wedge \neg(\neg C)$ mit Atomformeln A, B und C, dann ist $sub(a) = \{A, B, C, \neg C, \neg(\neg C), A \to B, (A \to B) \vee \neg C, ((A \to B) \vee \neg C) \wedge \neg(\neg C)\}$.

Ebenfalls induktiv für die Formeln aus fm sei erklärt

$$at(A) = \{A\}$$

für Atomformeln A und

$$at(a \wedge b) = at(a) \cup at(b),$$

$$at(a \vee b) = at(a) \cup at(b),$$

$$at(a \to b) = at(a) \cup at(b),$$

$$at(\neg a) = at(a)$$

für Formeln a und b, für die at schon erklärt ist. Die Elemente von at(a) heißen Atomformeln von a für jede Formel a.

Wenn zum Beispiel $a = ((A \wedge \neg B) \to \neg C) \vee \neg(\neg C)$ mit Atomformeln A, B und C, dann ist $at(a) = \{A,B,C\}$.

Für Formelmengen S sei

$$at(S) = \bigcup_{a \in S} at(a).$$

Die Elemente von at(S) heißen Atomformeln von S.

Für jede natürliche Zahl $n > 0$ sei auf fm eine n-stellige Operation $\vee_n$, die (n-fache) Disjunktion, induktiv definiert durch

$$\vee_1 \langle a_0 \rangle = a_0$$

und

$$\vee_n \langle a_i \rangle_{i<n} = \vee_{n-1} \langle a_i \rangle_{i<n-1} \vee a_{n-1}$$

für $n > 1$. Für $\vee_n \langle a_i \rangle_{i<n}$ wird auch nur

$$\vee \langle a_i \rangle_{i<n}$$

oder auch

$$a_0 \vee \ldots \vee a_{n-1}$$

geschrieben.

Eine Atomformel A und ihre Negation ¬A heiße Elementarformel.

Elementarformeln a und b heißen (zueinander) fremd, falls $at(a) \neq at(b)$ ist.

Eine n-fache Disjunktion $\vee\langle a_i\rangle_{i<n}$ von Elementarformeln a_i heiße (n-fache) Elementardisjunktion.

Für n-fache Elementardisjunktionen $\vee\langle a_i\rangle_{i<n}$ sei induktiv definiert

$$el(a_0) = \{a_0\}$$

und

$$el(\vee\langle a_i\rangle_{i<n}) = el(\vee\langle a_i\rangle_{i<n-1}) \cup \{a_{n-1}\}$$

für $n > 1$. Die Elemente von el(v) heißen Elementarformeln von v für jede Elementardisjunktion v.

Zum Beispiel ist $el(A \vee \neg B \vee C \vee \neg A) = \{A, \neg B, C, \neg A\}$ für Atomformeln A, B und C.

Ferner sei für n-fache Elementardisjunktionen $\vee\langle a_i\rangle_{i<n}$ definiert

$$k(\vee\langle a_i\rangle_{i<n}) = n.$$

k(v) heiße Komplexität von v für jede Elementardisjunktion v.

Für Mengen S von Elementardisjunktionen sei

$$k(S) = \Sigma_{v\in S}\, k(v).$$

k(S) heiße Komplexität von S.

Sei nun □ ein Element, das nicht in fm vorkommt, und sei v'

eine Fortsetzung von $\vee$ auf $fm \cup \{\Box\}$, so daß

$$a \vee' \Box = \Box \vee' a = a$$

für alle Formeln a ist.

Für jede Elementarformel a sei für n-fache Elementardisjunktionen $\vee\langle b_i\rangle_{i<n}$ induktiv definiert

$$b_0^a = \Box,$$

falls $b_0 = a$, und

$$b_0^a = b_0$$

sonst, sowie

$$(\vee\langle b_i\rangle_{i<n})^a = (\vee\langle b_i\rangle_{i<n-1})^a \vee' b_{n-1}^a$$

für $n > 1$.

$(\vee\langle b_i\rangle_{i<n})^a$ entsteht also aus $\vee\langle b_i\rangle_{i<n}$ durch "Entfernen" aller Elementarformeln b_i, die gleich a sind.

Zum Beispiel ist $(a \vee x)^a = x$, $(x \vee a \vee y \vee a)^a = x \vee y$ und $(a \vee a)^a = \Box$ für Elementarformeln a, x und y mit a ungleich x und y.

Für jede Elementarformel a und jede Menge S von Elementardisjunktionen sei

$$S^a = \{v^a \mid v \in S\}.$$

Für jede Elementarformel a und jede Menge S von Elementardisjunktionen sei

$$S^{[a]} = \{v \mid v \in S \text{ und } a \notin el(v)\}.$$

Wenn zum Beispiel $S = \{a \vee x, x \vee y, z \vee a\}$ mit Elementarformeln a, x, y, z und a ungleich x, y, z, dann ist $S^{[a]} = \{x \vee y\}$.

Man beachte, wenn S Menge von Elementardisjunktionen und a und b Elementarformeln mit $a \neq b$, dann ist $(S^a)^{[b]} = (S^{[b]})^a$.

Für n-fache Elementardisjunktionen $\vee\langle a_i\rangle_{i<n}$ sei induktiv erklärt

$$red(a_0) = a_0$$

und

$$red(\vee\langle a_i\rangle_{i<n}) = red(\vee\langle a_i\rangle_{i<n-1})^{a_{n-1}} \vee a_{n-1}$$

für $n > 1$.

$red(\vee\langle a_i\rangle_{i<n})$ ensteht also aus $\vee\langle a_i\rangle_{i<n}$ durch "Entfernen" aller Elementarformeln a_i, für die eine Elementarformel a_j existiert mit $i < j < n$.

Zum Beispiel ist $red(x \vee a \vee y \vee a \vee y) = x \vee a \vee y$ für paarweise verschiedene Elementarformeln a, x und y.

Für Mengen S von Elementardisjunktionen sei

$$red(S) = \{red(v) \mid v \in S\}.$$

Eine n-fache Elementardisjunktion $\vee\langle a_i\rangle_{i<n}$ heiße <u>wiederholungsfrei</u>, falls $a_i \neq a_j$ für alle $i, j < n$ mit $i \neq j$.

Eine Formelmenge S heiße <u>normal</u>, falls jedes $v \in S$ eine wiederholungsfreie Elementardisjunktion ist.

Wenn v Elementardisjunktion, dann ist also red(v) wiederholungsfrei. Wenn S Menge von Elementardisjunktionen, dann ist red(S) normal.

Man beachte, wenn S normale Formelmenge, a Elementarformel und $a \notin S$, dann ist $\square \notin S^a$, also auch S^a normal.

Auf der Menge der Elementarformeln aus fm sei die Abbildung $\sim$ definiert durch

$$\sim A = \neg A$$

und

$$\sim(\neg A) = A$$

für jede Atomformel A aus fm. ~a heiße Komplement von a für jede Elementarformel a. Eine Menge S von Elementarformeln heiße komplementfrei, falls aus $a \in S$ folgt $\sim a \notin S$.

Eine Algebra $B = \langle B_0, \sqcap, \sqcup, \rightarrow, - \rangle$ vom Typ $\langle 2,2,2,1 \rangle$ heiße Boolesche Algebra, falls für alle Elemente a, b und c aus B_0 gilt:

(1) $a \sqcap b = b \sqcap a$ und $a \sqcup b = b \sqcup a$,

(2) $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$ und $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$,

(3) $(a \sqcap b) \sqcup b = b$ und $(a \sqcup b) \sqcap b = b$,

(4) $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$ und $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$,

(5) $(a \sqcap -a) \sqcup b = b$ und $(a \sqcup -a) \sqcap b = b$,

(6) $a \rightarrow b = -a \sqcup b$.

Jeder Homomorphismus von der Formelalgebra $\langle fm, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg \rangle$ in die Boolesche Algebra $\langle \{0,1\}, \sqcap, \sqcup, \rightarrow, - \rangle$ heiße Bewertung.

Man beachte, daß jede Bewertung durch ihre Werte für die Atomformeln eindeutig bestimmt ist.

Eine Bewertung w erfülle eine Formel a, falls $w(a) = 1$. a heiße in diesem Fall auch gültig unter w. w erfülle eine Formelmenge S, falls $w(a) = 1$ für alle $a \in S$. S heiße in diesem Fall auch gültig unter w. Eine Formel a heiße erfüllbar oder auch gültig, falls eine Bewertung existiert, die a erfüllt. Eine Formelmenge S heiße erfüllbar oder gültig, falls es eine Bewertung gibt, die S erfüllt.

Man beachte, daß $S = \emptyset$ erfüllbar ist.

Für jede Bewertung w und jede Elementardisjunktion v ist na-

türlich $w(v) = w(red(v))$.

Wenn a und b Formeln, dann heiße a äquivalent b, falls für jede Bewertung w gilt $w(a) = w(b)$. Wenn S und T Mengen von Formeln, dann heiße S äquivalent T, falls für jede Bewertung w gilt, w erfüllt S genau dann, wenn w erfüllt T.

Eine Menge K heiße Kalkül, falls für alle $z \in K$ gilt

$$z = \langle\langle S_0,\ldots,S_{m-1}\rangle,\langle T_0,\ldots,T_{n-1}\rangle\rangle$$

mit beliebigen Mengen S_i und T_j für alle $i < m$ und alle $j < n$.

Für $\langle\langle S_0,\ldots,S_{m-1}\rangle,\langle T_0,\ldots,T_{n-1}\rangle\rangle \in K$ wird auch

$$K \quad \frac{S_0,\ldots,S_{m-1}}{T_0,\ldots,T_{n-1}}$$

geschrieben.

Wenn K Kalkül, dann heiße eine endliche Folge $\langle z_0,\ldots,z_{n-1}\rangle$ Ableitung von z_{n-1} aus z_0 mittels K, falls

$$K \quad \frac{z_i}{z_{i+1}}$$

für alle $i < n - 1$ gilt. Es wird dafür auch

$$K \quad \begin{array}{l} z_0 \\ \hline \\ \vdots \\ \\ \hline z_{n-1} \end{array}$$

geschrieben.

z_{n-1} heiße in diesem Fall auch ableitbar aus z_0 mittels K, wofür auch

$$z_0 \vdash_K z_{n-1}$$

geschrieben wird.

Man beachte, daß für alle $z = \langle S_0,\ldots,S_{m-1}\rangle$ die Folge $\langle z\rangle$ "triviale" Ableitung mittels jedes Kalküls ist. Für alle derartigen z und alle Kalküle K gilt also $z \vdash_K z$.

Wenn K Kalkül, dann heiße z Endpunkt von K, falls kein z' existiert, so daß

$$K \quad \frac{z}{z'}$$

gilt (wenn also kein $z' \neq z$ mittels K aus z ableitbar ist).

Im folgenden sei nun immer, ohne daß dies ausdrücklich erwähnt wird, da wo notwendig, eine Formelalgebra über einer geeigneten Menge von Atomformeln als gegeben angenommen.

2. Syndrome und Lösungen

In diesem Abschnitt werden Begriffe eingeführt, die für das Weitere grundlegend sind.

S heiße (logisches) Syndrom, falls S eine Menge von Formeln ist.

Wenn S Syndrom, dann heiße L Lösung (oder Diagnose) von S, falls

(1) L Menge von Elementarformeln,

(2) $at(L) = at(S)$ und

(3) eine Bewertung w existiert, die L und S, also $L \cup S$ erfüllt.

Als erfüllbare Menge von Elementarformeln ist die Lösung eines Syndroms natürlich komplementfrei.

Wenn ein Syndrom S endlich ist, dann gibt es nur endlich viele Lösungen von S.

Wenn eine Bewertung w das Syndrom S erfüllt, dann bestimmt w eindeutig eine Lösung von S, nämlich $\{a \mid a \in at(S) \cup \sim at(S) \text{ und } w(a) = 1\}$. Umgekehrt bestimmt jede Lösung L von S bis auf Werte für die Atomformeln, die nicht aus $at(S) \cup \sim at(S)$ sind, eindeutig eine Bewertung w, die L und S erfüllt, nämlich w mit $w(a) = 1$ für alle $a \in L$.

Es existiert also eine Lösung eines Syndroms S genau dann, wenn S erfüllbar ist.

Wenn S und S' Syndrome mit $at(S) = at(S')$ und S äquivalent S', dann ist L Lösung von S genau dann, wenn L Lösung von S' ist.

Dem folgenden Beispiel liegt die Vorstellung von "sich untereinander testenden Einheiten" zugrunde (man vergleiche etwa F.P. Preparata, G. Metze und R.T. Chien 1967 und M. Dal Cin 1979).

Sei $P = \{A,B,C,D,E\}$ eine Menge von "Einheiten" und $K = \{\langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,D\rangle, \langle D,E\rangle, \langle E,A\rangle\}$ eine Menge von "Testverbindungen". Da-

bei soll $\langle A,B\rangle \in K$ bedeuten "A testet B". Sei Def eine Injektion von P in die Menge der Atomformeln und sei $\langle b_i\rangle_{i\in I}$ eine Folge von Abbildungen auf K, so daß für alle $i \in I$ entweder $b_i(\langle A,B\rangle) = \neg Def(A) \rightarrow Def(B)$ oder $b_i(\langle A,B\rangle) = \neg Def(A) \rightarrow \neg Def(B)$ für alle $\langle A,B\rangle \in K$ ist.

Für jede Einheit A aus P soll die Atomformel Def(A) bedeuten "A ist defekt". $\neg Def(A)$ bedeutet also "A ist nicht defekt", $\neg Def(A) \rightarrow Def(B)$ also "wenn A nicht defekt, so ist B defekt" und $\neg Def(A) \rightarrow \neg Def(B)$ also "wenn A nicht defekt, so ist B nicht defekt".

Wenn $\neg Def(A) \rightarrow Def(B)$ gültig unter einer Bewertung w, dann ist "B defekt" gültig unter w, falls "A nicht defekt" gültig unter w ist. Wenn $\neg Def(A) \rightarrow \neg Def(B)$ gültig unter w, dann ist "B nicht defekt" gültig unter w, falls "A nicht defekt" gültig unter w ist. Wenn "A nicht defekt" nicht gültig unter w, also "A defekt" gültig unter w ist, dann kann "B defekt" oder "B nicht defekt" zusammen mit $\neg Def(A) \rightarrow Def(B)$ und mit $\neg Def(A) \rightarrow \neg Def(B)$ gültig unter w sein.

In den Formeln $\neg Def(A) \rightarrow Def(B)$ und $\neg Def(A) \rightarrow \neg Def(B)$ können also Def(B) und $\neg Def(B)$ als die "Aussagen" verstanden werden, die von der Einheit A über die Einheit B gemacht werden und die nur dann verläßlich sind, wenn A nicht defekt ist.

Sei zum Beispiel K durch ein b_i bewertet wie folgt:

$$b_i(\langle A,B\rangle) = \neg Def(A) \rightarrow \neg Def(B),$$

$$b_i(\langle B,C\rangle) = \neg Def(B) \rightarrow Def(C),$$

$$b_i(\langle C,D\rangle) = \neg Def(C) \rightarrow \neg Def(D),$$

$$b_i(\langle D,E\rangle) = \neg Def(D) \rightarrow Def(E),$$

$$b_i(\langle E,A\rangle) = \neg Def(E) \rightarrow \neg Def(A).$$

Das Syndrom $b_i(K) = \{\neg Def(A) \rightarrow \neg Def(B), \neg Def(B) \rightarrow Def(C), \neg Def(C)$

$\rightarrow \neg Def(D), \neg Def(D) \rightarrow Def(E), \neg Def(E) \rightarrow \neg Def(A)\}$ ist äquivalent zu $S = \{Def(A) \vee \neg Def(B), Def(B) \vee Def(C), Def(C) \vee \neg Def(D), Def(D) \vee Def(E), Def(E) \vee \neg Def(A)\}$. S und damit $b_i(K)$ hat, wie man sieht, unter anderem folgende Lösungen:

$$L_1 = \{Def(A), Def(B), Def(C), Def(D), Def(E)\},$$

$$L_2 = \{\neg Def(A), \neg Def(B), Def(C), Def(D), Def(E)\},$$

$$L_3 = \{\neg Def(A), \neg Def(B), Def(C), \neg Def(D), Def(E)\},$$

$$L_4 = \{\neg Def(A), \neg Def(B), Def(C), Def(D), \neg Def(E)\},$$

$$L_5 = \{Def(A), Def(B), \neg Def(C), \neg Def(D), Def(E)\},$$

$$L_6 = \{Def(A), Def(B), Def(C), \neg Def(D), Def(E)\}.$$

L_1 besagt zum Beispiel, daß alle Einheiten A, B, C, D und E defekt sein können. L_6 besagt, daß die Einheiten A, B, C und E defekt sein können und die Einheit D nicht defekt zu sein braucht. Man beachte, $\{\neg Def(A), \neg Def(B), \neg Def(C), \neg Def(D), \neg Def(E)\}$ ist nicht Lösung von S und damit nicht Lösung von $b_i(K)$.

Normale Syndrome, d.h. Mengen von wiederholungsfreien Elementardisjunktionen, haben, wie sich zeigen wird, einige für ihre Untersuchung und Auswertung günstige Eigenschaften.

Einen nützlichen Zusammenhang zwischen Mengen von Elementardisjunktionen, also z.B. normalen Syndromen, und deren Lösungen beschreibt zunächst

Bemerkung 2.1: Wenn S Menge von Elementardisjunktionen und L Lösung von S, dann ist $L \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S$.

Beweis: Wenn L Lösung von S, dann existiert eine Bewertung w mit $w(v) = 1$ für alle $v \in S$. Dann existiert für alle $v \in S$ eine Elementarformel $a \in el(v)$ mit $w(a) = 1$. Dann ist $w(\sim a) = 0$. Da

L erfüllbar durch w (also $w(b) = 1$ für alle $b \in L$), so ist $\sim a \notin L$. Da $at(L) = at(S)$, so muß dann $a \in L$ sein. Also ist $L \cap el(v) \neq \emptyset$.

Wenn S Menge von Elementardisjunktionen und L komplementfreie Menge von Elementarformeln mit $L \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S$, dann läßt sich in einfacher Weise aus L eine Lösung von S gewinnen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, die den nachfolgenden Definitionen zugrunde liegen.

Sei L Menge von Elementarformeln und S Menge von Elementardisjunktionen.

L heiße Lösungskern (oder Diagnosekern) von S, falls

(1) L komplementfrei,

(2) $L \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S$ und

(3) $at(L) \subseteq at(S)$.

L heiße Lösungsumgebung (oder Diagnoseumgebung) von S, falls

(1) und (2) gilt und

(3') $at(S) \subseteq at(L)$.

Jede Lösung von S ist natürlich Lösungskern und Lösungsumgebung von S.

Bemerkung 2.2: Wenn S Menge von Elementardisjunktionen, L Lösungskern von S und K komplementfreie Menge von Elementarformeln mit $at(L) \cap at(K) = \emptyset$ und $at(L \cup K) = at(S)$, dann ist $L \cup K$ eine Lösung von S.

Beweis: Da L und K komplementfrei und $at(L) \cap at(K) = \emptyset$, so ist auch $L \cup K$ komplementfrei. Dann existiert eine Bewertung w mit $w(a) = 1$ für alle $a \in L \cup K$. Da $(L \cup K) \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S$, so ist $w(v) = 1$ für alle $v \in S$. w erfüllt also $L \cup K$ und S (was zu zeigen war).

Jeder Lösungskern von S kann also in einfacher Weise zu einer Lösung von S erweitert werden.

Man beachte, wenn L Lösungskern von S und K komplementfreie Menge von Elementarformeln mit $at(L) \cap at(K) = \emptyset$ und $at(L \cup K) = at(S)$, dann ist auch $L \cup \sim K$ eine Lösung von S. Denn mit $\sim K$ an Stelle von K sind dann die Voraussetzungen in Bemerkung 2.2 ebenfalls erfüllt.

Bemerkung 2.3: Wenn S Menge von Elementardisjunktionen, L Lösungsumgebung von S und L' Teilmenge von L mit $at(L') = at(S)$, dann ist L' Lösung von S.

Beweis: Jede Bewertung, die L und S erfüllt, erfüllt auch L' und S.

Jede Lösungsumgebung von S kann also eindeutig zu einer Lösung von S reduziert werden.

Die in den Bemerkungen 2.1, 2.2 und 2.3 beschriebenen "übersichtlichen" Beziehungen zwischen Mengen von Elementardisjunktionen und deren Lösungen, also auch zwischen normalen Syndromen und deren Lösungen, werden in den folgenden Abschnitten genutzt.

Im weiteren wird nun ein Kalkül angegeben, mit dem aus jeder endlichen Formelmenge S eine Menge S' von Elementardisjunktionen mit $at(S) = at(S')$ und S äquivalent S' gewonnen werden kann (man vergleiche auch D. Hilbert und W. Ackermann 1972 oder M.M. Richter 1978).

Gelte

$$\text{D1} \quad \frac{\{x_0 \vee \ldots \vee (a \wedge b) \vee \ldots \vee x_{n-1}\}}{\{x_0 \vee .. \vee a \vee .. \vee x_{n-1}, x_0 \vee .. \vee b \vee .. \vee x_{n-1}\}}$$

$$\text{D2}\quad \frac{\{x_0 \vee \ldots \vee (a \vee (b \vee c)) \vee \ldots \vee x_{n-1}\}}{\{x_0 \vee \ldots \vee a \vee b \vee c \vee \ldots \vee x_{n-1}\}}$$

$$\text{D3}\quad \frac{\{x_0 \vee \ldots \vee (a \to b) \vee \ldots \vee x_{n-1}\}}{\{x_0 \vee \ldots \vee \neg a \vee b \vee \ldots \vee x_{n-1}\}}$$

$$\text{D4}\quad \frac{\{x_0 \vee \ldots \vee \neg(\neg a) \vee \ldots \vee x_{n-1}\}}{\{x_0 \vee \ldots \vee a \vee \ldots \vee x_{n-1}\}}$$

$$\text{D5}\quad \frac{\{x_0 \vee \ldots \vee \neg(a \wedge b) \vee \ldots \vee x_{n-1}\}}{\{x_0 \vee \ldots \vee \neg a \vee \neg b \vee \ldots \vee x_{n-1}\}}$$

$$\text{D6}\quad \frac{\{x_0 \vee \ldots \vee \neg(a \vee b) \vee \ldots \vee x_{n-1}\}}{\{x_0 \vee .. \vee \neg a \vee .. \vee x_{n-1}, x_0 \vee .. \vee \neg b \vee .. \vee x_{n-1}\}}$$

$$\text{D7}\quad \frac{\{x_0 \vee \ldots \vee \neg(a \to b) \vee \ldots \vee x_{n-1}\}}{\{x_0 \vee .. \vee a \vee .. \vee x_{n-1}, x_0 \vee .. \vee \neg b \vee .. \vee x_{n-1}\}}$$

für alle Formeln a, b, c und x_i. (Man beachte, daß $\neg(a \vee b)$ äquivalent zu $\neg a \wedge \neg b$ und $\neg(a \to b)$ äquivalent zu $\neg(\neg a \vee b)$ und damit äquivalent zu $a \wedge \neg b$ ist.)

Gelte

$$\text{DIS}\quad \frac{S}{(S - U) \cup V}$$

falls $U \subseteq S$ und

$$K \quad \frac{U}{V}$$

für ein $K \in \{D1,D2,D3,D4,D5,D6,D7\}$.

Wenn $S = \emptyset$, dann ist natürlich S Endpunkt von DIS.

Für alle Formeln a sei

$$d(a) = \{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$$

für die n-fache Disjunktion $x_0 \vee \ldots \vee x_{n-1}$ mit $a = x_0 \vee \ldots \vee x_{n-1}$, für die keine m-fache Disjunktion $y_0 \vee \ldots \vee y_{m-1}$ mit $a = y_0 \vee \ldots \vee y_{m-1}$ und $n < m$ existiert.

Man beachte, daß jede Formel zumindest 1-fache Disjunktion ist.

Zum Beisspiel ist $d((a \vee b) \vee c) = \{a,b,c\}$ und $d(a \vee (b \vee c)) = \{a,b \vee c\}$ für Elementarformeln a, b und c.

Für Formelmengen S sei

$$d(S) = \cup_{a \in S}\, d(a).$$

Für alle Formeln a sei

$$cs(a) = card(sub(a) - \{a\}).$$

(card(b) sei die Kardinalität einer Menge b.) cs(a) ist also die Anzahl der "echten" Subformeln von a.

Bemerkung 2.4: Wenn S endliche Menge von Formeln, dann existiert eine natürliche Zahl n_S, so daß die Länge jeder Ableitung aus S mittels DIS kleiner n_S ist.

Beweis: Für alle Formeln a, b und c gilt:

(i) $cs(a) + cs(b) < cs(a \wedge b)$,

(ii) $cs(a) + cs(b) + cs(c) < cs(a \vee (b \vee c))$,

(iii) $cs(\neg a) + cs(b) < cs(a \to b)$,

(iv) $cs(a) < cs(\neg(\neg a))$,

(v) $cs(\neg a) + cs(\neg b) < cs(\neg(a \wedge b))$,

(vi) $cs(\neg a) + cs(\neg b) < cs(\neg(a \vee b))$,

(vii) $cs(a) + cs(\neg b) < cs(\neg(a \to b))$.

Daraus folgt: Wenn

$$\text{DIS} \quad \frac{T}{(T - U) \cup V}$$

dann existiert für jede Folge $\langle u_i \rangle_{i<m}$ aller Elemente aus $d(T)$, also für jede Folge $\langle u_i \rangle_{i<m}$ mit $im(\langle u_i \rangle_{i<m}) = d(T)$, eine Folge $\langle v_i \rangle_{i<n}$ aller Elemente aus $d((T - U) \cup V)$, so daß $\Sigma\langle cs(v_i) \rangle_{i<n} < \Sigma\langle cs(u_i) \rangle_{i<m}$ ist. (Dabei sei $\Sigma\langle a_i \rangle_{i<n} = a_0 + \ldots + a_{n-1}$ für jede Folge $\langle a_i \rangle_{i<n}$ von natürlichen Zahlen mit $n > 0$.)

Denn wenn zum Beispiel

$$\text{D1} \quad \frac{U}{V}$$

mit $U = \{x_0 \vee \ldots \vee (a \wedge b) \vee \ldots \vee x_{k-1}\}$ und $V = \{x_0 \vee \ldots \vee a \vee \ldots \vee x_{k-1}, x_0 \vee \ldots \vee b \vee \ldots \vee x_{k-1}\}$ und $\langle u_0, \ldots, u_{i-1}, a \wedge b, u_{i+1}, \ldots, u_{m-1} \rangle$ eine Folge der Elemente von $d(T)$, dann ist $\langle u_0, \ldots, u_{i-1}, a, b, u_{i+1}, \ldots, u_{m-1} \rangle$ eine Folge der Elemente von $d((T - U) \cup V)$ und $cs(u_0) + \ldots + cs(u_{i-1}) + cs(a) + cs(b) + cs(u_{i+1}) + \ldots + cs(u_{m-1}) < cs(u_0) + \ldots + cs(u_{i-1}) + cs(a \wedge b) + cs(u_{i+1}) + \ldots + cs(u_{m-1})$ (wegen Punkt (i)).

Entsprechendes erhält man, wenn $K \in \{D2, D3, D4, D5, D6, D7\}$ und

$$K \quad \frac{U}{V}$$

(wegen der Punkte (ii), (iii), (iv), (v), (vi) und (vii)).

Sei nun $\langle x_{S,i}\rangle_{i<m_S}$ eine Folge der Elemente von d(S). Dann gilt für alle Ableitungen $\langle S,S_1,\ldots,S_{n-1}\rangle$ aus S mittels DIS, daß für alle j mit $0 < j < n$ eine Folge $\langle x_{S_j,i}\rangle_{i<m_{S_j}}$ der Elemente von $d(S_j)$ existiert, so daß

$$\Sigma\langle cs(x_{S,i})\rangle_{i<m_S} > \Sigma\langle cs(x_{S_1,i})\rangle_{i<m_{S_1}}$$
$$> \ldots > \Sigma\langle cs(x_{S_{n-1},i})\rangle_{i<m_{S_{n-1}}} > 0.$$

Deswegen kann es keine beliebig langen Ableitungen aus S mittels DIS geben (was zu zeigen war).

Satz 2.5: Wenn S endliche Formelmenge und $S \vdash_{DIS} S'$, dann (1) ist $at(S) = at(S')$ sowie S äquivalent S' und (2) wenn S' Endpunkt von DIS, so ist S' Menge von Elementardisjunktionen.

Beweis: Zu (1): Wenn

$$\text{DIS}\ \frac{T}{U}$$

dann ist $at(T) = at(U)$ und T äquivalent U. Durch Induktion nach der Länge der Ableitungen aus S mittels DIS erhält man dann (1).

Zu (2): Wenn S' keine Menge von Elementardisjunktionen, dann gilt

$$\text{DIS}\ \frac{S'}{T'}$$

für ein T'. Also gilt (2).

Wenn S endliche Formelmenge, $S \vdash_{DIS} S'$ und S' Endpunkt von DIS, dann ist also red(S') normales Syndrom und $at(S) = at(red(S'))$ sowie S äquivalent red(S'). Dies gilt wegen Satz 2.5 und da $at(S') = at(red(S'))$ und S' äquivalent red(S') ist.

3. Erfüllbarkeit von Syndromen, Existenz von Lösungen

Die Existenz von Lösungen von Syndromen ist (man vergleiche Abschnitt 2) gleichbedeutend mit der Erfüllbarkeit dieser Syndrome. Die Erfüllbarkeit oder Unerfüllbarkeit eines Syndroms ist also wichtig als Diagnoseergebnis und wird von Bedeutung sein bei der Einführung bestimmter Kalküle in den folgenden Abschnitten. In diesem Abschnitt wird ein Kalkül angegeben, mit dem festgestellt werden kann, ob ein endliches normales Syndrom erfüllbar oder unerfüllbar ist. Dieser Kalkül gehört zur Sorte der "Resolutionskalküle", von denen einige bekannt sind (man vergleiche etwa J.A. Robinson 1965, R. Anderson und W.W. Bledsoe 1970 sowie C.L. Chang und R.C.T. Lee 1973).

Wenn x und y Elementardisjunktionen, dann heiße z (aussagenlogische reduzierte) Resolvente von x und y, falls ein a existiert, so daß $a \in el(x)$, $\sim a \in el(y)$ und $z = red(x^a \vee y^{\sim a})$ ist.

Jede Resolvente ungleich $\square$ ist also wiederholungsfreie Elementardisjunktion.

Zum Beispiel ist $b \vee c$ Resolvente von $c \vee b \vee a$ und $c \vee \sim a$ und c Resolvente von $a \vee c \vee a$ und $\sim a$ für paarweise fremde Elementarformeln a, b und c. Für jede Elementarformel a ist $\square$ Resolvente z.B. von $a \vee a$ und $\sim a$.

Eine Elementardisjunktion v heiße tautologiefrei, falls aus $a \in el(v)$ folgt $\sim a \notin el(v)$, also el(v) komplementfrei ist.

Eine Elementardisjunktion v heiße komplementvollständig bezüglich einer Menge S von Elementardisjunktionen, falls für alle $a \in el(v)$ eine $u \in S$ existiert mit $\sim a \in el(u)$.

Gelte

$$\text{RTK} \quad \frac{S}{S \cup \{z\}}$$

falls

(1) S normale Formelmenge,

(2) x, y $\in$ S existieren, so daß z Resolvente von x und y,

(3) z $\neq \square$,

(4) z tautologiefrei,

(5) z komplementvollständig bezüglich S und

(6) z $\neq$ v für alle v $\in$ S ist.

Wenn S = $\emptyset$, dann ist natürlich S Endpunkt von RTK.

Bemerkung 3.1: Wenn S endliche normale Formelmenge, dann (1) existiert eine natürliche Zahl n_S, so daß die Länge jeder Ableitung aus S mittels RTK kleiner n_S ist, und (2) die Menge aller Ableitungen aus S mittels RTK ist endlich.

Beweis: Zu (1): Wenn

$$\text{RTK} \quad \frac{U}{U \cup \{z\}}$$

dann ist z $\notin$ U. Also ist die Länge jeder Ableitung von S $\cup$ T aus S mittels RTK gleich card(T) + 1 (card(T) sei die Kardinalität von T). Sei E_S die Menge aller wiederholungsfreien Elementardisjunktionen, die sich mit Elementarformeln von Formeln aus S bilden lassen. Da S endlich, so ist auch E_S endlich. T ist Teilmenge von E_S. Also ist die Länge jeder Ableitung von S $\cup$ T aus S mittels RTK kleiner oder gleich card(E_S) + 1, d.h. es gilt (1).

Zu (2): Wenn U endlich, dann gibt es nur endlich viele z, so daß

$$\text{RTK} \quad \frac{U}{U \cup \{z\}}$$

Deswegen, und da nach (1) die Länge jeder Ableitung aus S kleiner einer natürlichen Zahl n_S ist, gilt (2).

Satz 3.2: Wenn S endliche normale Formelmenge und $S \vdash_{RTK} T$ mit Elementarformeln a, ~a ∈ T, dann ist S unerfüllbar.

Beweis: Wenn z Resolvente von x und y, also $z = red(x^a \vee y^{\sim a})$ mit $a \in el(x)$ und $\sim a \in el(y)$, $z \neq \square$ und eine Bewertung w erfüllt x und y, so erfüllt w auch z. Denn es muß $w(a) = 1$ oder $w(\sim a) = 1$ sein. Wenn $w(a) = 1$, dann ist $w(\sim a) = 0$. Da y Elementardisjunktion, so muß dann $w(y^{\sim a}) = 1$ sein, also $w(x^a \vee y^{\sim a}) = w(red(x^a \vee y^{\sim a})) = 1$. Wenn $w(\sim a) = 1$, so folgt $w(x^a) = 1$, also $w(red(x^a \vee y^{\sim a})) = 1$. Wenn also

$$\text{RTK} \quad \frac{U}{U \cup \{z\}}$$

und U erfüllbar, dann ist auch $U \cup \{z\}$ erfüllbar.

Durch Induktion nach der Länge der Ableitungen aus S mittels RTK erhält man dann, wenn S erfüllbar und $S \vdash_{RTK} T$, dann ist auch T erfüllbar.

Es gilt also, wenn $S \vdash_{RTK} T$ mit Elementarformeln a, ~a ∈ T, also T unerfüllbar ist, dann ist S unerfüllbar (was zu zeigen war).

Satz 3.3: Wenn S endliche normale Formelmenge und S unerfüllbar, dann gilt $S \vdash_{RTK} T$ mit Elementarformeln a, ~a ∈ T.

Beweis durch Induktion nach k(S), der Komplexität von S:

Wenn $k(S) = 0$, dann ist $S = \emptyset$ und damit S erfüllbar.

Sei $k(S) > 0$ und S unerfüllbar.

Fall 1: Es existieren Elementarformeln a, ~a ∈ S. (Dann ist weiter nichts zu zeigen, da $S \vdash_{RTK} S$.)

Fall 2: Es existieren keine Elementarformeln a, ~a ∈ S. Dann gibt es (da S unerfüllbar) ein v ∈ S mit k(v) > 1 und ein b ∈ el(v) mit b ∉ S sowie ein ~b ∈ el(u) für ein u ∈ S.

$(S^b)^{[\sim b]}$ ist dann normale unerfüllbare Formelmenge.

Denn da b ∉ S, so ist □ ∉ S^b und damit S^b und $(S^b)^{[\sim b]}$ normal. Angenommen $(S^b)^{[\sim b]}$ ist erfüllbar, also L ∩ el(u) ≠ ∅ für alle u ∈ $(S^b)^{[\sim b]}$ und eine Lösung L von $(S^b)^{[\sim b]}$ (man vergleiche Bemerkung 2.1), dann ist auch (L ∪ {~b}) ∩ el(u) ≠ ∅ für alle u ∈ S. Also ist L ∪ {~b} Lösungskern von S und (man vergleiche Bemerkung 2.2) damit S erfüllbar (im Widerspruch zur Voraussetzung).

Da $k((S^b)^{[\sim b]}) < k(S)$, so existiert nach Induktionsvoraussetzung ein T' mit Elementarformeln a', ~a' ∈ T', so daß $(S^b)^{[\sim b]} \vdash_{RTK} T'$.

Durch Induktion nach der Länge der Ableitungen zeigt man, wenn $(S^b)^{[\sim b]} \vdash_{RTK} (S^b)^{[\sim b]} \cup U'$, dann existiert ein U, so daß $U' = U^b$ und $S \vdash_{RTK} S \cup U$ gilt.

Für die einzige Ableitung $<(S^b)^{[\sim b]}>$ der Länge 1 aus $(S^b)^{[\sim b]}$ mittels RTK ist dies klar.

Gelte

$$\frac{(S^b)^{[\sim b]}}{\begin{array}{c}\vdots \\ \text{RTK} \\ \vdots\end{array}}$$

$$\frac{(S^b)^{[\sim b]} \cup U'}{(S^b)^{[\sim b]} \cup U' \cup \{z'\}}$$

und sei z' Resolvente von x', y' ∈ $(S^b)^{[\sim b]} \cup U'$.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein U mit $U' = U^b$ und

$$\text{RTK}\ \frac{S}{S \cup U}$$

Es existieren also $x, y \in S \cup U$ mit $x' = x^b$ und $y' = y^b$.

Wenn z' Resolvente von x^b und y^b, also $z' = \text{red}((x^b)^c \vee (y^b)^{\sim c})$ mit $c \in \text{el}(x^b)$ und $\sim c \in \text{el}(y^b)$, so ist $z = \text{red}(x^c \vee y^{\sim c})$ Resolvente von x und y und $z' = z^b$.

Dabei gilt:

Da $z' \neq \square$, so auch $z \neq \square$.

Da z' tautologiefrei, so auch z tautologiefrei, da $\sim b \notin \text{el}(z')$.

Da z' komplementvollständig bezüglich $(S^b)^{[\sim b]} \cup U'$, so ist auch z komplementvollständig bezüglich $S \cup U$, da $\sim b \in \text{el}(u)$ für ein $u \in S$.

Da $z' \neq u'$ für alle $u' \in (S^b)^{[\sim b]} \cup U'$, so gilt $z \neq u$ für alle $u \in S^{[\sim b]} \cup U$, da aus $z^b \neq u^b$ folgt $z \neq u$, und es gilt auch $z \neq u$ für alle $u \in S \cup U$, da $\sim b \notin \text{el}(z)$ und $\sim b \in \text{el}(u)$ für alle $u \in S - S^{[\sim b]}$.

Es gilt also $U' \cup \{z'\} = (U \cup \{z\})^b$ und

$$\text{RTK}\ \frac{\dfrac{S}{S \cup U}}{S \cup U \cup \{z\}}$$

Wenn nun $(S^b)^{[\sim b]} \vdash_{RTK} T'$ mit Elementarformeln a', ~a' $\in$ T', dann existiert also ein T, so daß T' $\subseteq T^b$ und $S \vdash_{RTK} T$.

Dabei gilt: Entweder (i) ist a', ~a' $\in$ T (und damit schon alle gezeigt) oder (ii) es existieren c, d $\in$ T, so daß $a' = c^b$ und $\sim a' = d^b$ sowie a' $\neq$ c oder a' $\neq$ d ist.

Gilt (ii), dann ist b Resolvente von c und d. Wenn dann b $\notin$ T, so gilt

$$\text{RTK}\quad \frac{T}{T \cup \{b\}}$$

Ob nun b $\in$ T oder b $\notin$ T, in jedem Fall gilt $S \vdash_{RTK} T \cup \{b\}$.

(S - {v}) $\cup$ {b} ist normale unerfüllbare Formelmenge.

Denn angenommen (S - {v}) $\cup$ {b} ist erfüllbar und L eine Lösung von (S - {v}) $\cup$ {b}, dann ist (da b $\in$ el(v)) L Lösungskern von S, also S erfüllbar (im Widerspruch zur Voraussetzung).

Da k((S - {v}) $\cup$ {b}) < k(S), so existiert nach Induktionsvoraussetzung ein V mit Elementarformeln a, ~a $\in$ V und (S - {v}) $\cup$ {b} $\vdash_{RTK}$ V.

Durch Induktion nach der Länge der Ableitungen aus (S - {v}) $\cup$ {b} mittels RTK zeigt man, wenn $S \vdash_{RTK} T \cup \{b\}$ und (S - {v}) $\cup$ {b} $\vdash_{RTK}$ U, dann gilt $S \vdash_{RTK} T \cup U$.

Dies ist klar für die Ableitung <(S - {v}) $\cup$ {b}> der Länge 1 mittels RTK, denn $S \vdash_{RTK} T \cup \{b\}$ gilt nach Voraussetzung.

Gelte

$$\text{RTK}\quad \frac{\dfrac{(S - \{v\}) \cup \{b\}}{\vdots}}{\dfrac{U}{U \cup \{z\}}}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $S \vdash_{RTK} T \cup U$.

Wenn $z \in T$, dann ist natürlich $T \cup U = T \cup U \cup \{z\}$ und es gilt $S \vdash_{RTK} T \cup U \cup \{z\}$.

Sei nun $z \notin T$. z ist komplementvollständig bezüglich U, also auch komplementvollständig bezüglich $T \cup U$. Da $z \notin U$, so auch $z \notin T \cup U$. Es gilt also

$$\text{RTK}\quad \frac{T \cup U}{T \cup U \cup \{z\}}$$

und damit $S \vdash_{RTK} T \cup U \cup \{z\}$.

Wenn nun $S \vdash_{RTK} T \cup \{b\}$ und $(S - \{v\}) \cup \{b\} \vdash_{RTK} V$ mit Elementarformeln a, $\sim a \in V$, so gilt also $S \vdash_{RTK} T \cup V$ mit a, $\sim a \in T \cup V$ (was zu zeigen war).

Sei zum Beispiel

$$S = \{a \vee b, \sim a \vee b, a \vee \sim c, c \vee \sim b, \sim a \vee \sim b \vee \sim c, a \vee d\}$$

mit paarweise fremden Elementarformeln a, b, c und d. Dann ist $a \vee c$ Resolvente von $a \vee b$ und $c \vee \sim b$, $\sim a \vee c$ ist Resolvente von $\sim a \vee b$ und $c \vee \sim b$, $\sim a \vee \sim c$ ist Resolvente von $\sim a \vee b$ und $\sim a \vee \sim b \vee \sim c$, a ist Resolvente von $a \vee c$ und $a \vee \sim c$ und $\sim a$ ist Resolvente von $\sim a \vee c$ und $\sim a \vee \sim c$. Es gilt also

$$\text{RTK}\quad \begin{array}{l} S \\ \hline S \cup \{a \vee c\} \\ \hline S \cup \{a \vee c, \sim a \vee c\} \\ \hline S \cup \{a \vee c, \sim a \vee c, \sim a \vee \sim c\} \\ \hline S \cup \{a \vee c, \sim a \vee c, \sim a \vee \sim c, a\} \\ \hline S \cup \{a \vee c, \sim a \vee c, \sim a \vee \sim c, a, \sim a\} \end{array}$$

S ist also unerfüllbar.

Unter Umständen kann aus einer auf Unerfüllbarkeit zu prüfenden normalen Formelmenge S vor Anwendung von RTK eine echte Teilmenge S' von S gewonnen werden, die unerfüllbar ist genau dann, wenn S unerfüllbar ist, d.h. die erfüllbar ist genau dann, wenn S erfüllbar ist.

Bemerkung 3.4: Sei S Menge von Elementardisjunktionen, $v \in S$ und v nicht tautologiefrei. Dann ist $S - \{v\}$ erfüllbar genau dann, wenn S erfüllbar ist.

Beweis: Wenn $S - \{v\}$ erfüllbar, dann ist $L \cap el(u) \neq \emptyset$ für alle $u \in S - \{v\}$ und eine Lösung L von $S - \{v\}$ (man vergleiche Bemerkung 2.1). Da v nicht tautologiefrei, so existieren Elementarformeln a, $\sim a \in el(v)$. Falls $at(a) \subseteq at(L)$, so ist (da L komplementfrei) entweder $a \in L$ oder $\sim a \in L$. Dann ist $L \cap el(v) \neq \emptyset$, also L Lösungskern von S und damit S erfüllbar (man vergleiche Bemerkung 2.2). Falls $a \notin L$ und $\sim a \notin L$, dann ist $L \cup \{a\}$ und $L \cup \{\sim a\}$ Lösungskern von S und S ebenfalls erfüllbar.

Wenn S erfüllbar, dann ist natürlich $S - \{v\}$ als Teilmenge von S auch erfüllbar.

Bemerkung 3.5: Sei S Menge von Elementardisjunktionen, $v \in S$ und v nicht komplementvollständig bezüglich $S - \{v\}$. Dann ist $S - \{v\}$ erfüllbar genau dann, wenn S erfüllbar ist.

Beweis: Da v nicht komplementvollständig bezüglich $S - \{v\}$, so existiert ein $a \in el(v)$ mit $\sim a \notin el(u)$ für alle $u \in S - \{v\}$. Wenn L Lösung von $S - \{v\}$, also $L \cap el(u) \neq \emptyset$ für alle $u \in S - \{v\}$, dann ist auch $((L - \{\sim a\}) \cup \{a\}) \cap el(u) \neq \emptyset$ für alle $u \in S$, also $((L - \{\sim a\}) \cup \{a\})$ Lösungskern von S. Aus der Erfüllbarkeit von $S - \{v\}$ folgt also die Erfüllbarkeit von S.

Klar ist, wenn S erfüllbar, so ist auch $S - \{v\}$ erfüllbar.

Bemerkung 3.6: Sei S Menge von Elementardisjunktionen, $v \in S$ und $u \in S - \{v\}$ mit $el(u) \subseteq el(v)$. Dann ist $S - \{v\}$ erfüllbar genau dann, wenn S erfüllbar ist.

Beweis: Wenn L Lösung von $S - \{v\}$, also $L \cap el(u) \neq \emptyset$, dann ist auch $L \cap el(v) \neq \emptyset$ und L also Lösungskern von S. Wenn $S - \{v\}$ erfüllbar, so ist also auch S erfüllbar.

Wenn S erfüllbar, dann ist natürlich $S - \{v\}$ erfüllbar.

Bemerkung 3.7: Sei S normale Formelmenge, a Elementarformel, $a \in S$ und $\sim a \notin S$. Dann ist $S^{\sim a}$ erfüllbar genau dann, wenn S erfüllbar ist.

Beweis: Wenn L Lösung von $S^{\sim a}$, dann ist L Lösungskern von S. Aus der Erfüllbarkeit von $S^{\sim a}$ folgt also die Erfüllbarkeit von S.

Wenn L Lösung von S, dann ist $L \cap el(a) \neq \emptyset$, also $a \in L$. Dann ist $\sim a \notin L$, also $L \cap el(u) \neq \emptyset$ für alle $u \in S^{\sim a}$. L ist also Lösungskern von $S^{\sim a}$. Wenn S erfüllbar, so ist also auch $S^{\sim a}$ erfüllbar.

Die Bemerkungen 3.4, 3.5, 3.6 und 3.7 geben Anlaß zur Einführung eines Kalküls.

Gelte

$$\text{RED} \quad \frac{S}{T}$$

falls

(1) S normale Formelmenge und

(2) entweder $T = S - \{v\}$ für ein $v \in S$, das nicht tautologiefrei oder nicht komplementvollständig bezüglich $S - \{v\}$ oder für das $el(u) \subseteq el(v)$ für ein $u \in S - \{v\}$ ist, oder $T = S^{\sim a}$

für eine Elementarformel $a \in S$ mit $\sim a \notin S$.

Bemerkung 3.8: Wenn S normale Formelmenge und $S \vdash_{RED} S'$, dann ist S erfüllbar genau dann, wenn S' erfüllbar ist, d.h. es ist S unerfüllbar genau dann, wenn S' unerfüllbar ist.

Beweis durch Induktion nach der Länge der Ableitungen aus S mittels RED.

Für paarweise fremde Elementarformeln a, b und c gilt zum Beispiel

$$\text{RED}\quad \frac{\frac{\frac{\frac{\{a,b,\sim a \vee \sim b, a \vee \sim a, c, \sim b \vee \sim a\}}{\{a,b,\sim a \vee \sim b, a \vee \sim a, c\}}}{\{a,b,\sim a \vee \sim b, a \vee \sim a\}}}{\{a,b,\sim a \vee \sim b\}}}{\{a,b,\sim b\}}$$

$\{a,b,\sim b\}$ ist, wie man sieht, unerfüllbar. Also ist nach Bemerkung 3.8 auch $\{a,b,\sim a \vee \sim b, a \vee \sim a, c, \sim b \vee \sim a\}$ unerfüllbar.

Weiter gilt zum Beispiel $\{a \vee \sim b, b \vee c, c \vee \sim d, d \vee e, e \vee \sim a\} \vdash_{RED} \emptyset$ für paarweise fremde Elementarformeln a, b, c, d und e. $\emptyset$ ist erfüllbar, also auch $\{a \vee \sim b, b \vee c, c \vee \sim d, d \vee e, e \vee \sim a\}$.

4. Ableiten von Lösungen

In diesem Abschnitt wird zunächst ein Kalkül erklärt, mit dem alle Lösungskerne, und damit natürlich auch alle Lösungen, eines endlichen normalen Syndroms S gewonnen werden können. Es wird dann eine Teilmenge dieses Kalküls angegeben, mit der ebenfalls alle Lösungskerne von S gewonnen werden können, mit der aber alle Ableitungen vermieden werden, die sich nicht bis zur Gewinnung eines Lösungskerns von S "fortsetzen" lassen. Außerdem erlaubt dieser Teilkalkül zu prüfen, ob eine beliebige Menge von Elementarformeln Teilmenge einer Lösung von S ist.

Gelte

$$\text{LO}\quad \frac{S\ ,\ D}{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ D \cup \{a\}}$$

falls S normale Formelmenge, $a \in at(S) \cup \sim at(S)$ und $\sim a \notin S$.

Man beachte: Wenn

$$\text{LO}\quad \frac{S\ ,\ D}{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ D \cup \{a\}}$$

dann gilt für jede Menge T auch

$$\text{LO}\quad \frac{S\ ,\ D \cup T}{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ D \cup T \cup \{a\}}$$

und

$$\text{LO}\quad \frac{S\ ,\ D - T}{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ (D - T) \cup \{a\}}$$

Man beachte ferner, wenn $\sim a \notin S$, dann ist, da S normal, $\Box \notin (S^{[a]})^{\sim a}$, also $(S^{[a]})^{\sim a}$ normal.

$\emptyset$,D ist natürlich Endpunkt von LO. S,D ist Endpunkt von LO, falls für alle $a \in at(S) \cup \sim at(S)$ gilt $\sim a \in S$.

Bemerkung 4.1: Wenn S endliche normale Formelmenge, dann ist (1) die Länge einer Ableitung von T,D aus S,$\emptyset$ mittels LO genau gleich card(D) + 1 und (2) die Menge aller Ableitungen aus S,$\emptyset$ mittels LO endlich.

Beweis: Durch Induktion nach card(D) wird zunächst (1) gezeigt:

Wenn card(D) = 0, dann $D = \emptyset$, also $S,\emptyset \vdash_{LO} S,\emptyset$. $\langle\langle S,\emptyset\rangle\rangle$ ist in diesem Fall die einzige Ableitung von S,$\emptyset$ aus S,$\emptyset$ mittels LO.

Sei card(D) > 0 und S,$\emptyset$ nicht Endpunkt von LO. Sei

$$A = \langle\langle S,\emptyset\rangle,\langle(S^{[a]})^{\sim a},\{a\}\rangle,\ldots,\langle T,D\rangle\rangle$$

Ableitung mittels LO. Dann ist auch

$$A' = \langle\langle(S^{[a]})^{\sim a},\emptyset\rangle,\ldots,\langle T,D - \{a\}\rangle\rangle$$

Ableitung mittels LO. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Länge von A' gleich card(D - {a}) + 1 und gleich der Länge von $\langle\langle(S^{[a]})^{\sim a},\{a\}\rangle,\ldots,\langle T,D\rangle\rangle$. Also ist die Länge von A gleich card(D - {a}) + 1 + 1 = card(D) + 1.

Zu (2): Wenn U endlich, dann gibt es nur endlich viele a, so daß

$$LO \quad \frac{U\ ,\ D}{(U^{[a]})^{\sim a}\ ,\ D \cup \{a\}}$$

Deswegen, und da nach (1) die Länge einer Ableitung von T,D aus S,$\emptyset$ mittels LO die Länge card(D) + 1 hat und card(D) + 1 $\leq$ card(at(S)) + 1, kann es nur endlich viele Ableitungen aus S,$\emptyset$ mittels LO geben.

Satz 4.2: Sei S ein endliches normales Syndrom. Dann gilt $S,\emptyset \vdash_{LO} \emptyset,L$ genau dann, wenn L Lösungskern von S ist.

Beweis durch Induktion nach k(S):

Wenn $k(S) = 0$, dann ist $S = \emptyset$, $\emptyset,\emptyset \vdash_{LO} \emptyset,\emptyset$ und $\emptyset$ die einzige Lösung von $\emptyset$.

Sei $k(S) > 0$.

Wenn

$$\text{LO}\quad \frac{\dfrac{S\ ,\ D}{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ \{a\}}}{\emptyset\ ,\ L}$$

dann ist $k((S^{[a]})^{\sim a}) < k(S)$ und es gilt $(S^{[a]})^{\sim a},\{a\} - \{a\} \vdash_{LO} \emptyset,L - \{a\}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $L - \{a\}$ Lösungskern von $(S^{[a]})^{\sim a}$. Das heißt, es ist $(L - \{a\}) \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in (S^{[a]})^{\sim a}$. Dann ist natürlich auch $(L - \{a\}) \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S^{[a]}$. Da $a \in el(v)$ für alle $v \in S - S^{[a]}$, so ist $L \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S$. Also ist L Lösungskern von S.

Sei L Lösungskern von S, also $L \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S$. Für $a \in L$ ist $(L - \{a\}) \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S^{[a]}$. Da L komplementfrei, so $\sim a \notin L$, also $(L - \{a\}) \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in (S^{[a]})^{\sim a}$. Also ist $L - \{a\}$ Lösungskern von $(S^{[a]})^{\sim a}$. Da $k((S^{[a]})^{\sim a}) < k(S)$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung $(S^{[a]})^{\sim a}, \emptyset \vdash_{LO} \emptyset, L - \{a\}$. Wenn nun

$$\frac{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ \emptyset}{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}}$$

LO

$$\frac{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}}{\emptyset\ ,\ L - \{a\}}$$

so auch

$$\frac{S\ ,\ \emptyset}{\frac{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ \emptyset \cup \{a\}}{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}}}$$

LO

$$\frac{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}}{\emptyset\ ,\ (L - \{a\}) \cup \{a\}}$$

(da $a \in at(S) \cup \sim at(S)$ und $\sim a \notin S$), also $S,\emptyset \vdash_{LO} \emptyset,L$.

Man bekommt also alle Lösungskerne eines endlichen normalen Syndroms S mittels LO. Nach Bemerkung 2.2 kann jeder Lösungskern von S in einfacher Weise zu einer Lösung von S erweitert werden.

Sei zum Beispiel $S = \{a \vee \sim b, b \vee c, c \vee \sim d, d \vee e, e \vee \sim a\}$ mit paarweise fremden Elementarformeln a, b, c, d und e. Dann gilt

$$\frac{\{a \vee \sim b, b \vee c, c \vee \sim d, d \vee e, e \vee \sim a\}\ ,\ \emptyset}{\frac{\{\sim b, b \vee c, c \vee \sim d, d \vee e\}\ ,\ \{\sim a\}}{\text{LO}\quad \frac{\{c, c \vee \sim d, d \vee e\}\ ,\ \{\sim a, \sim b\}}{\frac{\{d \vee e\}\ ,\ \{\sim a, \sim b, c\}}{\emptyset\ ,\ \{\sim a, \sim b, c, d\}}}}}$$

{~a,~b,c,d} ist Lösungskern von S. {~a,~b,c,d,e} und {~a,~b,c,d, ~e} sind Lösungen von S. Es gilt zum Beispiel auch

$$\text{LO}\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{a \vee \sim b, b \vee c, c \vee \sim d, d \vee e, e \vee \sim a\}\ ,\ \emptyset}{\{a \vee \sim b, b \vee c, e, e \vee \sim a\}\ ,\ \{\sim d\}}}{\{\sim b, b \vee c, e\}\ ,\ \{\sim d, \sim a\}}}{\{c, e\}\ ,\ \{\sim d, \sim a, \sim b\}}}{\{e\}\ ,\ \{\sim d, \sim a, \sim b, c\}}}{\emptyset\ ,\ \{\sim d, \sim a, \sim b, c, e\}}$$

Also ist auch {~a,~b,c,~d,e} Lösung von S.

Aus Satz 4.2 erhält man

Korollar 4.3: Sei S endliches normales Syndrom. Dann ist S erfüllbar genau dann, wenn $S,\emptyset \vdash_{LO} \emptyset,L$ für ein L.

Beweis: Wenn S erfüllbar, dann existiert ein Lösungskern L von S. Nach Satz 4.2 gilt dann $S,\emptyset \vdash_{LO} \emptyset,L$. Wenn $S,\emptyset \vdash_{LO} \emptyset,L$, dann ist L nach Satz 4.2 Lösungskern von S, also S erfüllbar.

LO kann also auch zum Prüfen von endlichen normalen Syndromen auf Erfüllbarkeit verwendet werden.

S = {a ∨ b,~a ∨ b,a ∨ ~b,~a ∨ ~b} mit zueinander fremden Elementarformeln a und b ist zum Beispiel unerfüllbar. Man erhält

$$\text{LO}\quad \dfrac{\{a \vee b, \sim a \vee b, a \vee \sim b, \sim a \vee \sim b\}\ ,\ \emptyset}{\{b, \sim b\}\ ,\ \{a\}}$$

und

$$\text{LO}\quad \dfrac{\{a \vee b, \sim a \vee b, a \vee \sim b, \sim a \vee \sim b\}\ ,\ \emptyset}{\{b, \sim b\}\ ,\ \{\sim a\}}$$

und

$$\text{LO}\quad \frac{\{a \vee b, \sim a \vee b, a \vee \sim b, \sim a \vee \sim b\}\ ,\ \emptyset}{\{a, \sim a\}\ ,\ \{b\}}$$

sowie

$$\text{LO}\quad \frac{\{a \vee b, \sim a \vee b, a \vee \sim b, \sim a \vee \sim b\}\ ,\ \emptyset}{\{a, \sim a\}\ ,\ \{\sim b\}}$$

$\{b,\sim b\},\{a\}$, $\{b,\sim b\},\{\sim a\}$, $\{a,\sim a\},\{b\}$ und $\{a,\sim a\},\{\sim b\}$ sind jeweils Endpunkte von LO. Es existieren also keine Ableitungen von $\emptyset$,L aus S,$\emptyset$ mittels LO.

Man kann mit LO allerdings auch, wenn S erfüllbar ist, Endpunkte T,D von LO aus S,$\emptyset$ ableiten, ohne daß $T = \emptyset$, also D Lösungskern von S ist. Zum Beispiel ist $S = \{a \vee b, c \vee \sim a, c \vee \sim b, a \vee \sim c\}$ mit paarweise fremden Elementarformeln a, b, c erfüllbar und es gilt

$$\text{LO}\quad \cfrac{\cfrac{\{a \vee b, c \vee \sim a, c \vee \sim b, a \vee \sim c\}\ ,\ \emptyset}{\{a \vee b, \sim a, \sim b\}\ ,\ \{\sim c\}}}{\{b, \sim b\}\ ,\ \{\sim c, \sim a\}}$$

$\{b,\sim b\},\{\sim c,\sim a\}$ ist Endpunkt von LO. Zu einem Lösungskern von S kommt man dagegen wie folgt:

$$\text{LO}\quad \cfrac{\cfrac{\{a \vee b, c \vee \sim a, c \vee \sim b, a \vee \sim c\}\ ,\ \emptyset}{\{a \vee b, a\}\ ,\ \{c\}}}{\emptyset\ ,\ \{c, a\}}$$

Ableitungen aus S,$\emptyset$ mittels LO von Endpunkten von LO, die bei erfüllbarem S keine Lösungskerne liefern, kann man vermeiden mittels des nachfolgend erklärten Teils von LO.

Gelte

$$\text{LOE}\quad \frac{S\ ,\ D}{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ D \cup \{a\}}$$

falls

$$\text{LO}\quad \frac{S\ ,\ D}{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ D \cup \{a\}}$$

und $(S^{[a]})^{\sim a}$ erfüllbar ist.

Man beachte, daß nach Satz 3.2 und Satz 3.3 $(S^{[a]})^{\sim a}$ erfüllbar ist genau dann, wenn kein T mit Elementarformeln b, $\sim b \in T$ ableitbar aus $(S^{[a]})^{\sim a}$ mittels RTK ist. Ob ein solches T ableitbar (oder nicht ableitbar) aus $(S^{[a]})^{\sim a}$ mittels RTK, ist nach Bemerkung 3.1 in endlich vielen Schritten feststellbar.

Da LOE $\subseteq$ LO, so ist nach Bemerkung 4.1 für jede endliche normale Formelmenge S die Länge einer Ableitung von T,D aus S,Ø mittels LOE gleich card(D) + 1 und die Menge aller Ableitungen aus S,Ø mittels LOE endlich.

Satz 4.4: Sei S ein endliches normales Syndrom. Dann gilt $S,\emptyset \vdash_{\text{LOE}} \emptyset,L$ genau dann, wenn L Lösungskern von S ist.

Beweis: Wenn $S,\emptyset \vdash_{\text{LOE}} \emptyset,L$, dann gilt $S,\emptyset \vdash_{\text{LO}} \emptyset,L$. Dann ist L Lösungskern von S nach Satz 4.2.

Sei L Lösungskern von S. Dann gilt $S,\emptyset \vdash_{\text{LO}} \emptyset,L$ nach Satz 4.2. Sei $\langle\langle S_0,D_0\rangle,\ldots,\langle S_{n-1},D_{n-1}\rangle\rangle$ Ableitung von Ø,L aus S,Ø mittels LO, also $S_0 = S$, $D_0 = \emptyset$ und $S_{n-1} = \emptyset$, $D_{n-1} = L$. Für alle $i < n$ gilt $S_i,D_i - D_i \vdash_{\text{LO}} \emptyset,L - D_i$. Nach Satz 4.2 ist dann $L - D_i$ Lösungskern von S_i, also S_i erfüllbar (man vergleiche Abschnitt 2). Nach Definition von LOE ist also $\langle\langle S_0,D_0\rangle,\ldots,\langle S_{n-1},D_{n-1}\rangle\rangle$ Ableitung mittels LOE. Also gilt $S,\emptyset \vdash_{\text{LOE}} \emptyset,L$.

Eigenschaften, die LOE von LO unterscheiden, beschreiben die nachfolgenden Aussagen.

Korollar 4.5: Wenn S endliches normales Syndrom und $S,\emptyset \vdash_{LOE} S',L'$ mit $L' \neq \emptyset$, dann $S',L' \vdash_{LOE} \emptyset,L$ für ein L.

Beweis: Wenn $S,\emptyset \vdash_{LOE} S',L'$, dann ist S' erfüllbar nach Definition von LOE. Es existiert also ein Lösungskern D von S' und nach Satz 4.4 gilt $S',L' - L' \vdash_{LOE} \emptyset,D$ und damit $S',L' \vdash_{LOE} \emptyset,D \cup L'$.

Wenn also S endliches normales Syndrom, $S,\emptyset \vdash_{LOE} T,L$ und T,L Endpunkt von LOE mit $L \neq \emptyset$, dann ist $T = \emptyset$, also L Lösungskern von S. Denn angenommen $T \neq \emptyset$, dann würde nach Korollar 4.5 ein T' und ein L' existieren, so daß

$$\text{LOE} \quad \frac{T\ ,\ L}{T'\ ,\ L'}$$

also T,L nicht Endpunkt von LOE wäre.

Bemerkung 4.6: Wenn S endliches normales Syndrom, $S,\emptyset \vdash_{LO} T,D$, T,D Endpunkt von LO mit $T \neq \emptyset$ und $D \neq \emptyset$, dann $S,\emptyset \nvdash_{LOE} T,D$.

Beweis: Wenn T,D Endpunkt von LO und $T \neq \emptyset$, dann ist T unerfüllbar. Denn sonst würde $T,\emptyset \vdash_{LO} \emptyset,L$ gelten nach Korollar 4.3 und also auch $T,\emptyset \cup D \vdash_{LO} \emptyset,L \cup D$. Nach Definition von LOE ist also T,D aus $S,\emptyset$ nicht ableitbar mittels LOE.

Mit LOE erhält man also genau die nichttrivialen Ableitungen, d.h. die Ableitungen einer Länge größer 1 aus $S,\emptyset$, die sich mittels LO zu Ableitungen von $\emptyset,L$ für ein L "fortsetzen" lassen.

Korollar 4.5 besagt natürlich auch, wenn $S,\emptyset \vdash_{LOE} S',L'$, dann ist L' Teilmenge einer Lösung L von S. Es gilt aber auch die Umkehrung dieser Aussage.

Satz 4.7: Sei S endliches normales Syndrom. Wenn L' Teilmenge eines Lösungskerns L von S ist (z.B. L Lösung von S), dann gilt $S,\emptyset \vdash_{LOE} S',L'$ für ein S'.

Beweis durch Induktion nach card(L'): Wenn card(L') = 0, dann $L' = \emptyset$ und natürlich gilt $S,\emptyset \vdash_{LOE} S,\emptyset$.

Sei card(L') > 0. Sei $a \in L'$. Dann ist $L' - \{a\} \subseteq L - \{a\}$ und $L - \{a\}$ Lösungskern von $(S^{[a]})^{\sim a}$ (da L Lösungskern von S ist). Nach Induktionsvoraussetzung gilt $(S^{[a]})^{\sim a},\emptyset \vdash_{LOE} S',L' - \{a\}$ für ein S'. Es gilt aber auch

$$\text{LOE}\ \frac{S\ ,\ \emptyset}{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ \{a\}}$$

(da $(S^{[a]})^{\sim a}$ erfüllbar ist). Also wenn

$$\text{LOE}\ \frac{\begin{array}{c}(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ \emptyset \\ \vdots \\ S'\ ,\ L' - \{a\}\end{array}}{}$$

so auch

$$\text{LOE}\ \frac{\begin{array}{c}\begin{array}{c}S\ ,\ \emptyset \\ \hline (S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ \emptyset \cup \{a\}\end{array} \\ \vdots \\ S'\ ,\ (L' - \{a\}) \cup \{a\}\end{array}}{}$$

also $S,\emptyset \vdash_{LOE} S',L'$.

Man kann also mittels LOE prüfen, ob L' Teilmenge eines Lösungskerns von S ist.

Sei zum Beispiel S = {a ∨ b,b ∨ ~a,c ∨ ~a} und L' = {a,~b} mit Elementarformeln a, b und c. Es gilt

$$\text{LOE}\quad \frac{\{a \vee b, b \vee \sim a, c \vee \sim a\}\ ,\ \emptyset}{\{b,c\}\ ,\ \{a\}}$$

und es ist {b,c},{a} Endpunkt von LOE. {a} ist also Teilmenge einer Lösung von S. L' ist nicht ableitbar aus S mittels LOE, also keine Teilmenge einer Lösung von S.

5. Über die Struktur von Lösungen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß es zu jedem Syndrom S eine Äquivalenzrelation $=_S$ gibt, so daß jede Lösung von S Vereinigung von Äquivalenzklassen von $=_S$ ist und verschiedene Lösungen von S sich (nur) durch "Komplemente" von solchen Äquivalenzklassen unterscheiden.

Unter den Äquivalenzklassen von $=_S$ kann es nun eine geben, die insofern ausgezeichnet ist, als daß ihre Elemente in allen Lösungen von S vorkommen.

Es wird ein Kalkül angegeben, eine Teilmenge von LO, mit dem zu jedem endlichen normalen Syndrom, das erfüllbar ist, diese ausgezeichnete Klasse gefunden werden kann, falls sie existiert, und mit dem sich auch alle anderen Äquivalenzklassen von $=_S$ bestimmen lassen.

Kennt man die Äquivalenzklassen von $=_S$ und möchte Lösungen von S, so genügt es, wie gezeigt wird, Mengen von Repräsentanten aus bestimmten Klassen von $=_S$ zu prüfen (mittels des in Abschnitt 4 erklärten Kalküls LOE), ob sie Teilmengen von Lösungen von S sind.

Sei S nun ein beliebiges Syndrom. Eine Elementarformel a heiße allgemein bezüglich S oder allgemeines Lösungselement von S, falls $a \in L$ für jede Lösung L von S ist.

Wenn S erfüllbar und $a \in at(S) \cup \sim at(S)$, dann gilt natürlich: a ist in jeder Lösung von S genau dann, wenn ~a in keiner Lösung von S ist. Das heißt, a ist allgemein bezüglich S genau dann, wenn ~a in keiner Lösung von S ist. Das heißt also, a ist nicht allgemein bezüglich S genau dann, wenn ~a in einer Lösung von S ist.

Man beachte, falls keine Lösung von S existiert, also S uner-

füllbar ist, dann ist jede Elementarformel a allgemein bezüglich S.

Wenn S erfüllbar, also eine Lösung von S existiert, dann können nur solche Elementarformeln a allgemein bezüglich S sein, für die $a \in at(S) \cup \sim at(S)$ gilt.

Klar ist, wenn es nur allgemeine Lösungselemente von S gibt und S erfüllbar ist, dann existiert genau eine Lösung von S.

Wenn a und b Elementarformeln und S beliebiges Syndrom, dann heiße a äquivalent b bezüglich S, falls $a \in L$ genau dann, wenn $b \in L$ für jede Lösung L von S.

Für jedes Syndrom S sei die Relation $=_S$ definiert durch

$$a =_S b,$$

falls a äquivalent b bezüglich S ist.

Man beachte, falls keine Lösung von S existiert, dann gilt $a =_S b$ für alle Elementarformeln a und b.

Wenn a und b Elementarformeln und $a, b \notin at(S) \cup \sim at(S)$, dann sind a und b in keiner Lösung von S, also gilt $a =_S b$.

Bemerkung 5.1: Für jedes Syndrom S und alle Elementarformeln a, b und c gilt:

(1) $a =_S a$

(2) Wenn $a =_S b$, dann $b =_S a$.

(3) Wenn $a =_S b$ und $b =_S c$, dann $a =_S c$.

(4) $a =_S b$ genau dann, wenn $\sim a =_S \sim b$.

Beweis: (1) und (2) sind klar. (3) gilt wegen der Transitivität von "genau dann, wenn".

Zu (4): Wenn $a =_S b$, dann ist $a \in L$ genau dann, wenn $b \in L$ für jede Lösung L von S. Dann ist $\sim a \in L$ genau dann, wenn $\sim b \in L$

für jede Lösung L von S, also $\sim a =_S \sim b$. Wenn $\sim a =_S \sim b$, dann ist $\sim a \in L$ genau dann, wenn $\sim b \in L$ für jede Lösung L von S. Dann ist $a \in L$ genau dann, wenn $b \in L$ für jede Lösung L von S, also gilt $a =_S b$.

(1), (2) und (3) besagen, daß $=_S$ Äquivalenzrelation ist.
Zusätzlich (4) besagt, daß $=_S$ Kongruenzrelation bezüglich $\sim$ ist.

Für alle Syndrome S und alle Elementarformeln a sei

$$[a]_S = \{b \mid b =_S a\}.$$

$[a]_S$ ist also die Äquivalenzklasse von $=_S$, die a enthält.
Unmittelbar erhält man für jedes Syndrom S:

Wenn Elementarformeln a und b allgemein bezüglich S, dann gilt $a =_S b$, also $[a]_S = [b]_S$.
Wenn $a \in L$ und L Lösung von S, dann ist $[a]_S \subseteq L$.

Weiter gilt:

Bemerkung 5.2: Für jedes Syndrom S und jede Elementarformel a ist $[\sim a]_S = \sim[a]_S$.

Beweis: Es gilt $b \in [\sim a]_S$ genau dann, wenn $b =_S \sim a$, dies genau dann, wenn $\sim b =_S \sim(\sim a)$, dies genau dann, wenn $\sim b =_S a$, dies genau dann, wenn $\sim b \in [a]_S$, dies genau dann, wenn $\sim(\sim b) \in \sim[a]_S$, und dies genau dann, wenn $b \in \sim[a]_S$.

Bemerkung 5.3: Wenn L die Lösung eines beliebigen Syndroms S, dann ist $\bigcup_{a \in L} [a]_S = L$.

Beweis: Wenn $a \in L$, dann ist $[a]_S \subseteq L$ (siehe auch oben). Wenn $b \in L$, dann ist natürlich $b \in [b]_S \subseteq \bigcup_{a \in L} [a]_S$.

Bemerkung 5.4: Wenn L und L' Lösungen eines beliebigen Syndroms S sind, $Z = \{[a]_S \mid a \in L\}$ und $Z' = \{[a']_S \mid a' \in L'\}$, dann existiert eine Bijektion i von Z auf Z' mit $i(D) = D$ oder $i(D) = \sim D$ für alle $D \in Z$.

Beweis: Sei i Abbildung auf Z mit $i([a]_S) = [a]_S$, falls $a \in L$ und $a \in L'$, und $i([a]_S) = \sim[a]_S$, falls $a \in L$ und $a \notin L'$. Wenn $a \in L \cap L'$, dann ist $[a]_S \in Z'$. Wenn $a \in L$ und $a \notin L'$, dann ist $\sim a \in L'$, also $[\sim a]_S = \sim[a]_S \in Z'$. i ist dann Bijektion von Z auf Z'.

Bemerkung 5.3 und 5.4 besagen: Verschiedene Lösungen L und L' von S unterscheiden sich durch "Komplemente" von Äquivalenzklassen von $=_S$.

Seien a, b und c paarweise fremde Elementarformeln. Sei $S = \{a \vee b, b \vee c, c \vee \sim a\}$. Dann sind $\{a,b,c\}$, $\{\sim a,b,c\}$, $\{\sim a,b,\sim c\}$ und $\{a,\sim b,c\}$ die Lösungen von S und es ist $[a]_S = \{a\}$, $[b]_S = \{b\}$, $[c]_S = \{c\}$, $[\sim a]_S = \{\sim a\}$, $[\sim b]_S = \{\sim b\}$ und $[\sim c]_S = \{\sim c\}$. Sei $T = \{a \vee b, \sim a \vee \sim b\}$. Dann sind $\{a,\sim b\}$ und $\{\sim a,b\}$ die Lösungen von T und es ist $[a]_T = \{a,\sim b\}$ und $[\sim a]_T = \{\sim a,b\}$. Sowohl S als auch T haben keine allgemeinen Lösungselemente. Wenn $U = \{a \vee b, a \vee \sim b, \sim b\}$, dann sind a und $\sim b$ allgemein bezüglich U.

Wenn L Lösungskern von S, $L \cup D$ Lösung von S, $D \neq \emptyset$, $D \cap L = \emptyset$ und $a \in D$, dann ist a nicht allgemein bezüglich S und $[a]_S = \{a\}$. Dies gilt, da (nach Bemerkung 2.2) auch $L \cup (D - \{a\}) \cup \{\sim a\}$ eine Lösung von S ist.

Im folgenden wird beschrieben, wie für jedes endliche normale Syndrom S alle allgemeinen Lösungselemente von S und für alle Elementarformeln a, die Atomformeln von S oder Komplemente von solchen sind, die Äquivalenzklassen $[a]_S$ bestimmt werden können.

Lemma 5.5: Sei S normale Formelmenge und $a \in at(S) \cup \sim at(S)$. Dann ist a allgemein bezüglich S genau dann, wenn $a \notin S$ und $(S^{[\sim a]})^a$ unerfüllbar oder wenn $a \in S$ ist.

Beweis: Zur Implikation von "links" nach "rechts":

Wenn S unerfüllbar und $a \notin S$, dann ist S^a und $(S^{[\sim a]})^a$ unerfüllbar für jede Elementarformel a.

Sei S erfüllbar, a allgemein bezüglich S und $a \notin S$. Angenommen $(S^{[\sim a]})^a$ ist erfüllbar. Dann existiert eine Lösung L von $(S^{[\sim a]})^a$ und (nach Bemerkung 2.1) gilt $L \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in (S^{[\sim a]})^a$. Dann gilt $(L \cup \{\sim a\}) \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S^a$ und (da $a \notin el(S^a)$) auch $(L \cup \{\sim a\}) \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S$. Da $\sim a \notin L$ (wegen $at(L) = at((S^{[\sim a]})^a)$), so ist $L \cup \{\sim a\}$ Lösungskern von S (im Widerspruch dazu, daß a allgemeines Lösungselement von S ist).

Zur Implikation von "rechts" nach "links":

Wenn S unerfüllbar, dann ist jede Elementarformel a allgemein bezüglich S.

Sei S erfüllbar, sei $a \notin S$ und $(S^{[\sim a]})^a$ unerfüllbar oder sei $a \in S$.

Wenn $a \in S$, dann muß a in jeder Lösung von S sein. Also ist a allgemein bezüglich S.

Sei $a \notin S$. Angenommen a ist nicht allgemein bezüglich S. Dann existiert eine Lösung L von S mit $\sim a \in L$. Dann ist natürlich $a \notin L$ und L Lösungsumgebung von $(S^{[\sim a]})^a$ (im Widerspruch zur Unerfüllbarkeit von $(S^{[\sim a]})^a$).

Lemma 5.6: Sei S normale Formelmenge, $a, b \in at(S) \cup \sim at(S)$, a allgemein bezüglich S, $a \neq b$ und $\sim a \notin S$. Dann ist b allgemein bezüglich S genau dann, wenn b allgemein bezüglich $(S^{[a]})^{\sim a}$ ist.

Beweis: Zur Implikation von "links" nach "rechts":

Wenn S unerfüllbar, dann ist auch $(S^{[a]})^{\sim a}$ unerfüllbar, also jede Elementarformel b allgemein bezüglich $(S^{[a]})^{\sim a}$.

Sei S erfüllbar und b allgemein bezüglich S. Angenommen b ist nicht allgemein bezüglich $(S^{[a]})^{\sim a}$. Dann existiert eine Lösung L von $(S^{[a]})^{\sim a}$ mit $\sim b \in L$. Dann ist $L \cup \{a\}$ Lösungskern von $S^{\sim a}$, also auch von S, und $\sim b \in L \cup \{a\}$. Wenn dann L' eine Erweiterung von $L \cup \{a\}$ zu einer Lösung von S ist (man vergleiche Bemerkung 2.2), dann ist natürlich $\sim b \in L'$, also $b \notin L'$ (im Widerspruch dazu, daß b allgemein bezüglich S ist).

Zur Implikation von "rechts" nach "links":

Wenn S unerfüllbar, dann ist jede Elementarformel b allgemein bezüglich S.

Sei S erfüllbar und b allgemein bezüglich $(S^{[a]})^{\sim a}$. Angenommen b ist nicht allgemein bezüglich S. Dann existiert eine Lösung L von S mit $\sim b \in L$. Es ist $L \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S$ (nach Bemerkung 2.1). Da a allgemein bezüglich S, so $a \in L$. Deswegen gilt $L \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S^{\sim a}$. Dann gilt auch $L \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in (S^{\sim a})^{[a]} = (S^{[a]})^{\sim a}$. Also ist L Lösungsumgebung von $(S^{[a]})^{\sim a}$ und $\sim b \in L$, also $b \notin L$. Wenn L' Reduktion von L zu einer Lösung von $(S^{[a]})^{\sim a}$ ist (man vergleiche Bemerkung 2.3), dann ist natürlich auch $b \notin L'$ (im Widerspruch dazu, daß b allgemein bezüglich $(S^{[a]})^{\sim a}$ ist).

Lemma 5.7: Sei S normale Formelmenge, $a, b \in at(S) \cup \sim at(S)$ mit $a \neq b$ und $a \notin S$ sowie $\sim a \notin S$. Dann gilt:

(1) b allgemein bezüglich $(S^{[a]})^{\sim a}$ und $\sim b$ allgemein bezüglich $(S^{[\sim a]})^{a}$

genau dann, wenn

(2) $a =_S b$.

Beweis: Zur Implikation von (1) nach (2):

Wenn S unerfüllbar, dann gilt $a =_S b$ für alle Elementarformeln a und b.

Sei S erfüllbar und gelte (1).

Angenommen $a \neq_S b$. Dann existiert eine Lösung L von S mit $a \in L$ und $b \notin L$ oder mit $a \notin L$ und $b \in L$.

Gelte $a \in L$ und $b \notin L$. Dann ist $L \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in S^{\sim a}$, also auch $L \cap el(v) \neq \emptyset$ für alle $v \in (S^{[a]})^{\sim a}$. Also ist L Lösungsumgebung von $(S^{[a]})^{\sim a}$ und $b \notin L$ (im Widerspruch dazu, daß b allgemein bezüglich $(S^{[a]})^{\sim a}$ ist).

Gelte $a \notin L$ und $b \in L$. Dann ist L Lösungsumgebung von $(S^{[\sim a]})^{a}$ und $\sim b \notin L$ (im Widerspruch dazu, daß ~b allgemein bezüglich $(S^{[\sim a]})^{a}$ ist).

Zur Implikation von (2) nach (1):

Wenn S unerfüllbar, dann ist $(S^{[a]})^{\sim a}$ und $(S^{[\sim a]})^{a}$ unerfüllbar und damit b allgemein bezüglich $(S^{[a]})^{\sim a}$ und ~b allgemein bezüglich $(S^{[\sim a]})^{a}$ für jede Elementarformel b.

Sei S erfüllbar und gelte (2):

Wenn $(S^{[a]})^{\sim a}$ unerfüllbar, so b allgemein bezüglich $(S^{[a]})^{\sim a}$.

Sei $(S^{[a]})^{\sim a}$ erfüllbar. Angenommen b ist nicht allgemein bezüglich $(S^{[a]})^{\sim a}$. Dann existiert eine Lösung L von $(S^{[a]})^{\sim a}$ mit $b \notin L$. $L \cup \{a\}$ ist (da $\sim a \notin L$) Lösungskern von S. $L \cup \{a\}$ läßt sich natürlich zu einer Lösung L' von S erweitern mit $a \in L'$ und $b \notin L'$ (im Widerspruch zu $a =_S b$).

Wenn $(S^{[\sim a]})^{a}$ unerfüllbar, so ~b allgemein bezüglich $(S^{[\sim a]})^{a}$.

Sei $(S^{[\sim a]})^{a}$ erfüllbar. Angenommen ~b ist nicht allgemein bezüglich $(S^{[\sim a]})^{a}$. Dann existiert eine Lösung L von $(S^{[\sim a]})^{a}$ mit $\sim b \notin L$. $L \cup \{\sim a\}$ ist Lösungskern von S (da $a \notin L$). Dann läßt sich $L \cup \{\sim a\}$ zu einer Lösung L' von S erweitern mit $\sim a \in L'$ und $\sim b \notin L'$ (im Widerspruch zu $\sim a =_S \sim b$, was genau dann gilt, wenn $a =_S b$).

Lemma 5.5, 5.6 und 5.7 erlauben die Einführung eines Kalküls, mit dem alle allgemeinen Lösungselemente eines erfüllbaren endlichen normalen Syndroms S gefunden und zu jedem $a \in at(S) \cup \sim at(S)$ mit a und ~a nicht allgemein bezüglich S alle Elementarformeln b mit $b =_S a$ bestimmt werden können.

Gelte

$$\text{AL} \quad \frac{S\ ,\ D}{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ D \cup \{a\}}$$

falls (1)

$$\text{LO} \quad \frac{S\ ,\ D}{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ D \cup \{a\}}$$

und (2) falls $a \in S$ oder falls $a \notin S$ und $(S^{[\sim a]})^{a}$ unerfüllbar ist.

Punkt (1) besagt, daß S normale Formelmenge, $a \in at(S) \cup \sim at(S)$ und $\sim a \notin S$ gelten muß.

Ob $(S^{[\sim a]})^{a}$ erfüllbar oder unerfüllbar ist, kann (man vergleiche Abschnitt 3) mittels RTK in endlich vielen Schritten festgestellt werden.

Nach Bemerkung 4.1 gilt: Wenn S endliche normale Formelmenge, dann ist (1) die Länge einer Ableitung von T,D aus S,∅ mittels AL genau gleich card(D) + 1 und (2) die Menge aller Ableitungen aus S,∅ mittels AL endlich.

Satz 5.8: Sei S endliches normales Syndrom und S erfüllbar. Wenn $S,\emptyset \vdash_{AL} T,D$ und T,D Endpunkt von AL, dann ist D die Menge aller allgemeinen Lösungselemente von S.

Beweis durch Induktion nach k(S), der Komplexität von S:

Wenn $k(S) = 0$, dann $S = \emptyset$. Es gilt $S,\emptyset \vdash_{AL} S,\emptyset$ und $S,\emptyset$ ist Endpunkt von AL. $\emptyset$ ist die Menge aller allgemeinen Lösungselemente von S.

Sei $k(S) > 0$.

Wenn dann $S,\emptyset$ Endpunkt von AL (dabei $S \neq \emptyset$), so ist (i) $\sim a \in S$ für alle $a \in at(S) \cup \sim at(S)$ oder (ii) $a \notin S$ und $(S^{[\sim a]})^{a}$ erfüllbar für alle $a \in at(S) \cup \sim at(S)$. (i) kann nicht gelten, da sonst S unerfüllbar wäre. Wenn (ii) gilt, dann ist nach Lemma 5.5 kein $a \in at(S) \cup \sim at(S)$ allgemein bezüglich S, also $\emptyset$ die Menge aller allgemeinen Lösungselemente von S.

Sei nun $S,\emptyset$ kein Endpunkt von AL.

Wenn

$$\dfrac{\dfrac{S\ ,\ \emptyset}{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ \{a\}}}{\begin{array}{l}\text{AL}\\ \\ \\ \\ \end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{array}}$$

$$T\ ,\ D$$

und T,D Endpunkt von AL, dann auch

$$\dfrac{(S^{[a]})^{\sim a}\ ,\ \emptyset}{\begin{array}{l}\text{AL}\\ \\ \\ \\ \end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{array}}$$

$$T\ ,\ D - \{a\}$$

und T,D - {a} Endpunkt von AL.

Nach Definition von AL und Lemma 5.5 ist a allgemein bezüglich S, also $(S^{[a]})^{\sim a}$ erfüllbar. Nach Induktionsvoraussetzung ist D - {a} die Menge der allgemeinen Lösungselemente von $(S^{[a]})^{\sim a}$. Nach Lemma 5.6 ist dann D die Menge aller allgemeinen Lösungselemente von S.

Sei zum Beispiel S = {a ∨ ~b,b ∨ c,a ∨ c,c ∨ ~d,d ∨ ~e,e ∨ ~a} mit paarweise fremden Elementarformeln a, b, c, d und e. Dann ist $(S^{[\sim c]})^{c}$ = {a ∨ ~b,b,a,~d,d ∨ ~e,e ∨ ~a} unerfüllbar. Dann gilt $S,\emptyset \vdash_{AL} (S^{[c]})^{\sim c},\{c\}$. $(S^{[c]})^{\sim c}$ = {a ∨ ~b,d ∨ ~e,e ∨ ~a} ist Endpunkt von AL. {c} ist also die Menge aller allgemeinen Lösungselemente von S.

Satz 5.9: Sei S endliches normales Syndrom und S erfüllbar, a ∈ at(S) ∪ ~at(S) und a sowie ~a nicht allgemein bezüglich S (also auch a ∉ S und ~a ∉ S). Wenn $(S^{[a]})^{\sim a},\emptyset \vdash_{AL}$ T,D und T,D Endpunkt von AL sowie $(S^{[\sim a]})^{a},\emptyset \vdash_{AL}$ U,E und U,E Endpunkt von AL, dann ist $D \cap \sim E = [a]_S - \{a\}$.

Beweis: Da a und ~a nicht allgemein bezüglich S und S erfüllbar, so existiert eine Lösung L von S mit a ∈ L und eine Lösung L' von S mit ~a ∈ L'. L ist dann Lösungsumgebung von $(S^{[a]})^{\sim a}$ und L' Lösungsumgebung von $(S^{[\sim a]})^{a}$, also sind $(S^{[a]})^{\sim a}$ und $(S^{[\sim a]})^{a}$ erfüllbar.

Wenn $(S^{[a]})^{\sim a},\emptyset \vdash_{AL}$ T,D und T,D Endpunkt von AL sowie $(S^{[\sim a]})^{a}$, $\emptyset \vdash_{AL}$ U,E und U,E Endpunkt von AL, dann ist D die Menge aller allgemeinen Lösungselemente von $(S^{[a]})^{\sim a}$ und E die Menge aller allgemeinen Lösungselemente von $(S^{[\sim a]})^{a}$ nach Satz 5.8. Dann ist $D \cap \sim E = [a]_S - \{a\}$ nach Lemma 5.7.

Sei S = {a ∨ b,b ∨ c,c ∨ ~a} mit paarweise fremden Elementarformeln a, b und c. Dann ist $(S^{[a]})^{\sim a}$ = {b ∨ c,c} und $(S^{[\sim a]})^{a}$

= {b,b ∨ c}. Es gilt {b ∨ c,c},∅ $\vdash_{AL}$ ∅,{c} und es ist ∅,{c} Endpunkt von AL. Es gilt {b,b ∨ c},∅ $\vdash_{AL}$ ∅,{b} und es ist ∅,{b} Endpunkt von AL. Da {c} ∪ ~{b} = ∅, so ist also $[a]_S$ = {a}.

Sei S = {a ∨ b,~a ∨ ~b} mit zueinander fremden Elementarformeln a und b. Es ist $(S^{[a]})^{\sim a}$ = {~b} und $(S^{[\sim a]})^{a}$ = {b}. Es gilt {~b},∅ $\vdash_{AL}$ ∅,{~b} und es ist ∅,{~b} Endpunkt von AL. Es gilt {b},∅ $\vdash_{AL}$ ∅,{b} und es ist ∅,{b} Endpunkt von AL. Da {~b} ∩ ~{b} = {~b}, so ist $[a]_S$ = {a,~b}.

Kennt man für alle a ∈ at(S) ∪ ~at(S) die Äquivalenzklassen $[a]_S$, so kann man z.B. Lösungen von S gewinnen, indem man bestimmte Mengen von Repräsentanten aus diesen Äquivalenzklassen auf Zugehörigkeit zu einer Lösung von S prüft. Dies besagt

Satz 5.10: Sei S endliches normales Syndrom und V Menge von Elementarformeln. Wenn S,∅ $\vdash_{LOE}$ T,V und $at(\cup_{a\in V} [a]_S) = at(S)$, dann ist $\cup_{a\in V} [a]_S$ Lösung von S.

Beweis: Wenn S,∅ $\vdash_{LOE}$ T,V, dann T,V $\vdash_{LOE}$ ∅,L für ein L nach Korollar 4.5. L ist Lösungskern von S. Es gilt also V ⊆ L ⊆ L' für eine Lösung L' von S. Für jedes a ∈ V ist $[a]_S \subseteq L'$, also auch $\cup_{a\in V} [a]_S \subseteq L'$. Wenn $at(\cup_{a\in V} [a]_S) = at(S)$, so ist $\cup_{a\in V} [a]_S$ = L' Lösung von S.

6. Anwendungen

Als erstes wird gezeigt, wie bei einem System von Einheiten, z.B. von Prozessoren, in dem jede Einheit von Einheiten des Systems auf Fehlerfreiheit, d.h. Intaktheit, getestet werden kann, aus "Testsituationen", Testbedingungen und aus von den Einheiten gemachten Testaussagen, die nicht verläßlich zu sein brauchen, da eine testende Einheit auch fehlerhaft, d.h. defekt sein kann, verläßliche Aussagen über mögliche Zustände der Einheiten zu bekommen sind. Dabei werden auch Situationen behandelt, die von komplexerer Art als die in Abschnitt 2 skizzierten sind.

$T = \langle P, K, \langle b_i \rangle_{i \in I} \rangle$ heiße einfaches sich selbst testendes System, falls

(1) P endliche Menge von Atomformeln,

(2) $K \subseteq P^2$ und

(3) b_i eine Abbildung von K in die Menge der Formeln mit entweder $b_i(\langle A,B \rangle) = \neg A \to B$ oder $b_i(\langle A,B \rangle) = \neg A \to \neg B$ für alle $i \in I$ ist.

Die Elemente von P heißen Einheiten von T, die von K Testverbindungen von T. Für alle $i \in I$ heiße das Syndrom $b_i(K)$ auch Syndrom von T.

$\langle P,K \rangle$ ist also ein gerichteter Graph und jede Abbildung b_i eine Bewertung seiner Kanten.

Jede Atomformel A soll auch bedeuten "A ist defekt". $\neg A$ bedeutet also "A ist nicht defekt". Wenn auch B Atomformel, dann bedeutet $\neg A \to B$ also "wenn A nicht defekt, dann ist B defekt" und $\neg A \to \neg B$ also "wenn A nicht defekt, dann ist B nicht defekt".

Auf die Verwendung einer Injektion von der Menge der Einheiten in die Menge der Atomformeln als "Prädikat" für "defekt" wie in Abschnitt 2 wird verzichtet. Man beachte, daß zum Beispiel

die Abbildung, die jede Atomformel A aus P auf A abbildet, eine solche Injektion ist.

"B defekt" ist gültig unter einer Bewertung w, die $\neg A \rightarrow B$ erfüllt, wenn "A nicht defekt" unter w gültig ist. "B nicht defekt" ist gültig unter einer Bewertung w, die $\neg A \rightarrow \neg B$ erfüllt, wenn ebenfalls "A nicht defekt" gültig unter w ist. Wenn "A nicht defekt" nicht gültig unter w, also "A defekt" gültig unter w ist, dann kann "B defekt" oder "B nicht defekt" gültig unter w sein und $\neg A \rightarrow B$ sowie $\neg A \rightarrow \neg B$ von w erfüllt werden.

Die Lösung eines Syndroms S von T beinhaltet Aussagen der Art "A defekt" oder "A nicht defekt" über die Einheiten A von T, die unter einer Bewertung gültig sind, unter der auch S gültig ist.

Die allgemeinen Lösungselemente eines Syndroms S von T sind Aussagen der Art "A defekt" oder "A nicht defekt" über die Einheiten A von T, die unter jeder Bewertung gültig sind, unter der auch S gültig ist.

Eine Äquivalenzklasse von $=_S$ beinhaltet Aussagen "A defekt" oder "A nicht defekt" über Einheiten von T, die alle zusammen gültig oder alle zusammen nicht gültig sind unter jeder Bewertung w, die S erfüllt.

Zu bemerken ist, daß jedes Syndrom S eines einfachen sich selbst testenden Systems T erfüllbar ist. Dies sieht man, wenn man die zu S äquivalente Formelmenge S' betrachtet, die aus S hervorgeht durch "Ersetzen" von $\neg A \rightarrow B$ durch $A \vee B$ und von $\neg A \rightarrow \neg B$ durch $A \vee \neg B$. Die Menge P der Einheiten von T ist eine Lösung von S' und damit von S, die "triviale" Lösung, die besagt, daß alle Einheiten von T defekt sind. Dies impliziert natürlich, daß für alle A aus P die Aussage $\neg A$ nie allgemeines Lösungselement von S sein kann. Eine Lösung von S kann also nie mit "Sicherheit" Auskunft geben, ob eine Einheit von T nicht defekt ist. Wohl aber kann es Atomformeln aus P als allgemeine Lösungselemente von S geben. Diese Einheiten sind dann "sicher" defekt.

Sei zum Beispiel P = {A,B,C,D,E}, K = {<A,B>,<B,A>,<B,C>,<C,D>, <D,E>,<E,A>} und

$$b_i(\langle A,B\rangle) = \neg A \to \neg B,$$

$$b_i(\langle B,A\rangle) = \neg B \to A,$$

$$b_i(\langle B,C\rangle) = \neg B \to \neg C,$$

$$b_i(\langle C,D\rangle) = \neg C \to \neg D,$$

$$b_i(\langle D,E\rangle) = \neg D \to \neg E,$$

$$b_i(\langle E,A\rangle) = \neg E \to A.$$

Zum Syndrom $b_i(K) = \{\neg A \to \neg B, \neg B \to A, \neg B \to \neg C, \neg C \to \neg D, \neg D \to \neg E, \neg E \to A\}$ ist äquivalent $S = \{A \vee \neg B, B \vee A, B \vee \neg C, C \vee \neg D, D \vee \neg E, E \vee A\}$. Lösungen von S und damit von $b_i(K)$ sind unter anderem $\{A,B,C,D,E\}$ und $\{A,\neg B,\neg C,\neg D,\neg E\}$. A ist allgemeines Lösungselement von S und es ist $[A]_S = \{A\}$ und also $[\neg A]_S = \{\neg A\}$. Weiter ist $[B]_S = \{B\}$, $[C]_S = \{C\}$, $[D]_S = \{D\}$ und $[E]_S = \{E\}$.

$T = \langle P,K,W,\langle b_i\rangle_{i\in I}\rangle$ heiße erweitertes sich selbst testendes System, falls

(1) P endliche Menge von Atomformeln,

(2) $K \subseteq P^2$,

(3) W Menge von Teilmengen von K und

(4) b_i eine Abbildung von W in die Menge der Formeln für jedes $i \in I$ ist.

Die Elemente von P heißen Einheiten von T, die von K Testverbindungen von T und die von W Testsituationen von T. Für alle $i \in I$ heiße das Syndrom $b_i(W)$ auch Syndrom von T.

Statt wie bei einfachen sich selbst testenden Systemen jedem $\langle A,B\rangle \in K$ eine bestimmte Formel mittels b_i zuzuordnen, wird nun verlangt, daß gewissen Teilmengen von K mittels b_i eine

beliebige Formel zugeordnet wird.

Dies erlaubt nun Testsituationen unter Einbeziehung zusätzlicher Bedingungen zu behandeln, wie dies in den folgenden Beispielen dargestellt wird. Dabei soll wieder jede Atomformel A auch als die Aussage "A ist defekt" gedeutet werden.

Der Testsituation

sei zugeordnet durch b_i entweder

$$(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow C$$

oder

$$(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C.$$

(Für eine Kante <A,B> eines gerichteten Graphen wird auch

$$A \longrightarrow B$$

geschrieben.)

Über den Zustand von C wird von A und B eine Aussage nach dem "Majoritätsprinzip" getroffen. Denn nur wenn "A nicht defekt" und "B nicht defekt" gültig unter einer Bewertung w, dann ist "C defekt" sicher gültig unter w, falls $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow C$ von w erfüllt wird, und ist "C nicht defekt" sicher gültig unter w, falls $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C$ von w erfüllt wird.

Der Testsituation

sei zugeordnet durch b_i entweder

$$(\neg A \vee \neg B) \rightarrow C$$

oder

$$(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg C.$$

Über den Zustand von C wird von A und B eine Aussage nach dem "Minoritätsprinzip" getroffen. Denn es genügt, daß "A nicht defekt" oder "B nicht defekt" gültig unter einer Bewertung w, damit "C defekt" sicher gültig unter w ist, falls $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow C$ von w erfüllt wird, und damit "C nicht defekt" sicher gültig unter w ist, falls $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg C$ von w erfüllt wird.

Der Testsituation

sei zugeordnet durch b_i entweder

$$(\neg A \vee \neg B) \rightarrow C$$

oder

$$(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C.$$

Die Aussage "C defekt" wird von A und B nach dem "Minoritätsprinzip" getroffen. Denn es genügt, daß "A nicht defekt" oder "B nicht defekt" gültig unter einer Bewertung w, damit "C defekt" sicher gültig unter w ist, falls $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow C$ von w erfüllt wird. Die Aussage "C nicht defekt" wird dagegen nach dem "Majoritätsprinzip" von A und B getroffen. Denn nur wenn "A nicht defekt" und "B nicht defekt" gültig unter einer Bewertung w, dann ist "C nicht defekt" sicher gültig unter w, falls $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C$ von w erfüllt wird.

Der Testsituation

sei zugeordnet durch b_i entweder

$$\neg A \rightarrow (B \vee C)$$

oder

$$\neg A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C).$$

Das bedeutet, die Einheit A kann, falls sie selbst nicht defekt ist, verläßlich feststellen, daß B oder C defekt ist, nicht aber die fehlerhafte Einheit lokalisieren, oder verläßlich feststellen, daß B und C nicht defekt sind.

Der Testsituation

sei zugeordnet durch b_i entweder

$$\neg A \rightarrow (B \wedge C)$$

oder

$$\neg A \rightarrow (\neg B \vee \neg C).$$

Das heißt, die Einheit A kann, falls sie selbst nicht defekt ist, verläßlich feststellen, daß B und C defekt sind, nicht aber, daß B und C zusammen nicht defekt sind.

Man beachte, daß bei erweiterten sich selbst testenden Syste-

men die "Komplexität" möglicher Testsituationen und ihnen zugeordneter Formeln nur durch die Anzahl "ihrer" Einheiten begrenzt ist.

Als zweites wird gezeigt, wie Probleme der Parallelisierung von Aktivitäten von Einheiten, zum Beispiel von Prozessen, behandelt werden können.

Jede Einheit soll aktiv oder nicht aktiv sein können. Bekannt seien die gegenseitigen Abhängigkeiten der Aktivitäten der Einheiten, zum Beispiel ob zwei Einheiten nicht gleichzeitig aktiv sein dürfen oder ob sie gleichzeitig aktiv sein müssen. Gezeigt wird, wie aus derartigen "Aktivitätsbedingungen" Aussagen über mögliche gleichzeitige Aktivitäten der Einheiten zu gewinnen sind.

$T = \langle P, \langle S_i \rangle_{i \in I} \rangle$ heiße Aktivitätssystem, falls

(1) P Menge von Atomformeln und

(2) S_i Menge von Formeln mit $at(S_i) \subseteq P$ für alle $i \in I$ ist.

Die Elemente von P heißen Einheiten von T. Für alle $i \in I$ heiße das Syndrom S_i auch Syndrom von T.

Jede Atomformel A soll auch bedeuten "A ist aktiv". (Auf ein "Prädikat" für "aktiv" wird also verzichtet.) $\neg A$ ist dann zu deuten als "A ist nicht aktiv". Wenn auch B Atomformel, dann ist zum Beispiel $A \rightarrow \neg B$ zu deuten als "wenn A aktiv, dann ist B nicht aktiv", $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ als "A ist genau dann aktiv, wenn B aktiv ist" und $\neg A \rightarrow \neg B$ als "wenn A nicht aktiv, dann ist B nicht aktiv".

Eine Lösung eines Syndroms S_i von T enthält dann Aussagen der Art "A ist aktiv" oder "A ist nicht aktiv" über die Einheiten A aus $at(S_i)$, besagt also, in welchem der beiden Zustände "aktiv" oder "nicht aktiv" sich diese Einheiten befinden können bei gleichzeitiger Gültigkeit von S_i.

Man beachte: Die "Ausschließungsbedingung"

$$A \rightarrow \neg B$$

(für die Einheiten A und B) ist äquivalent zu

$$\neg A \vee \neg B$$

und dies ist äquivalent zu

$$B \rightarrow \neg A,$$

also ist

$$A \rightarrow \neg B$$

äquivalent zu

$$(A \rightarrow \neg B) \wedge (B \rightarrow \neg A).$$

Die "Gleichzeitigkeitsbedingung"

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

ist äquivalent zu

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A).$$

Die "Notwendigkeitsbedingung"

$$\neg A \rightarrow \neg B$$

ist äquivalent zu

$$A \vee \neg B$$

und dies ist äquivalent zu

$$B \rightarrow A.$$

Enthält ein Syndrom S_i nur Formeln der Art $A \rightarrow \neg B$, $(A \rightarrow B) \wedge (B$

$\rightarrow$ A) und $\neg A \rightarrow \neg B$ mit Atomformeln A und B, so sieht man, beachtet man die vorhergehenden Äquivalenzen, daß $\{\neg A \mid A \in P\}$ Lösung von S_i ist. S_i besitzt also eine "triviale" Lösung, welche besagt, daß keine Einheit aktiv zu sein braucht bei Gültigkeit von S_i. Das heißt auch, daß es keine Atomformel als allgemeines Lösungselement von S_i geben kann.

Ist eine negierte Atomformel $\neg A$ allgemeines Lösungselement eines Syndroms S_i von T, so besagt dies, daß die Einheit A nie aktiv sein kann, wenn S_i gültig ist. Will man diese Situation vermeiden, so bedarf es einer Veränderung von S_i.

Eine Äquivalenzklasse von $=_{S_i}$ beinhaltet Zustandsaussagen, die nur zusammen zutreffen oder nur zusammen nicht zutreffen können, falls S_i gültig ist.

Sei zum Beispiel $P = \{A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,C_1,C_2,C_3\}$. Sei $S_1 = \{A_2 \rightarrow \neg B_1, B_1 \rightarrow \neg C_2, (B_2 \rightarrow C_2) \wedge (C_2 \rightarrow B_2), \neg B_1 \rightarrow \neg B_2\}$. Äquivalent zu S_1 ist $S_1' = \{\neg A_2 \vee \neg B_1, \neg B_1 \vee \neg C_2, \neg B_2 \vee C_2, \neg C_2 \vee B_2, B_1 \vee \neg B_2\}$. $\{A_2, \neg B_1, \neg B_2, \neg C_2\}$ und $\{\neg A_2, B_1, \neg B_2, \neg C_2\}$ sind diejenigen Lösungen von S_1' und damit von S_1, die Atomformeln enthalten. Also nur die Einheiten A_2 und B_1 aus $at(S_1)$ können überhaupt, aber nicht gleichzeitig aktiv sein.

Sei $S_2 = \{A_2 \rightarrow \neg B_1, B_1 \rightarrow \neg C_2, (B_2 \rightarrow C_2) \wedge (C_2 \rightarrow B_2)\}$. S_2 ist äquivalent zu $S_2' = \{\neg A_2 \vee \neg B_1, \neg B_1 \vee \neg C_2, \neg B_2 \vee C_2, \neg C_2 \vee B_2\}$. $\{A_2, \neg B_1, B_2, C_2\}$ und $\{\neg A_2, B_1, \neg B_2, \neg C_2\}$ sind Lösungen von S_2', die jeweils einen "maximalen" Anteil an Atomformeln haben. Alle Einheiten aus $at(S_2)$ können in diesem Fall aktiv sein, entweder

$$A_2,\ B_2,\ C_2$$

gleichzeitig oder

$$B_1$$

allein.

Sei $S_3 = \{A_1 \rightarrow \neg A_2, A_2 \rightarrow \neg A_3, B_1 \rightarrow \neg B_2, C_1 \rightarrow \neg C_2, C_2 \rightarrow \neg C_3, A_2 \rightarrow \neg B_1, B_1 \rightarrow \neg C_2, (B_2 \rightarrow C_2) \wedge (C_2 \rightarrow B_2)\}$. S_3 ist äquivalent zu $S_3' = \{\neg A_1 \vee \neg A_2, \neg A_2 \vee \neg A_3, \neg B_1 \vee \neg B_2, \neg C_1 \vee \neg C_2, \neg C_2 \vee \neg C_3, \neg A_2 \vee \neg B_1, \neg B_1 \vee \neg C_2, \neg B_2 \vee C_2, \neg C_2 \vee B_2\}$. S_3' hat unter anderem die Lösungen $L_1 = \{A_1, \neg A_2, A_3, B_1, \neg B_2, C_1, \neg C_2, C_3\}$ und $L_2 = \{\neg A_1, A_2, \neg A_3, \neg B_1, B_2, \neg C_1, C_2, \neg C_3\}$.
Verlangt man außer der Gültigeit von S_3, daß die Einheiten

$$A_1, A_2, A_3$$

in dieser Reihenfolge,

$$B_1, B_2$$

in dieser Reihenfolge und

$$C_1, C_2, C_3$$

in dieser Reihenfolge und möglichst parallel aktiv sind, so erhält man zum Beispiel, daß

$$A_1, B_1, C_1$$

gleichzeitig aktiv, anschließend

$$A_2, B_2, C_2$$

gleichzeitig aktiv und anschließend

$$A_3, C_3$$

gleichzeitig aktiv sein können.

Bei Reihefolgeproblemen wie diesem sind Lösungen interessant, die "Querschnitte" durch die "Reihenfolgen" enthalten.

Ausschließungs-, Gleichzeitigkeits- und Notwendigkeitsbedingungen können sich natürlich auch auf mehr als jeweils zwei Einheiten beziehen.

Dazu einige Beispiele, bei denen auch konjunktive Normalformeln angegeben werden, die zu den Aktivitätsbedingungen äquivalent sind.

$(A \wedge B) \rightarrow C$

ist äquivalent zu

$\neg A \vee \neg B \vee C.$

$(A \vee B) \rightarrow C$

ist äquivalent zu u

$(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C).$

$((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow (A \wedge B))$

ist äquivalent zu

$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee A) \wedge (\neg C \vee B).$

$((A \vee B) \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow (A \vee B))$

ist äquivalent zu

$(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee A \vee B).$

$\neg A \rightarrow \neg(B \wedge C)$

ist äquivalent zu

$A \vee \neg B \vee \neg C.$

$\neg A \rightarrow \neg(B \vee C)$

ist äquivalent zu

$(A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C).$

Man beachte, daß die "Komplexität" möglicher Aktivitätsbedingungen nur durch die Anzahl "ihrer" Einheiten begrenzt ist.

Neben Ausschließungs-, Gleichzeitigkeits- und Notwendigkeitsbedingungen hat die Erfüllbarkeit von Belegungsansprüchen Einfluß auf mögliche Aktivitäten von Einheiten, wenn man annimmt, daß eine Einheit nur dann aktiv sein kann, wenn ihre Belegungsansprüche, ihre "Betriebsmittelanforderungen", erfüllt sind.

Als drittes wird gezeigt, wie bei einem System von Einheiten, zum Beispiel bei einem Prozessorsystem, in dem Einheiten andere Einheiten belegen können, aus "Belegungsbedingungen", d.h. aus Abhängigkeiten von Belegungsansprüchen und Belegungseinschränkungen, Aussagen über mögliche gleichzeitige Belegungen zu erhalten sind.

$T = \langle P, \langle S_i \rangle_{i \in I} \rangle$ heiße Belegungssystem, falls gilt:

(1) P ist endliche Menge,

(2) P^2 ist eine Menge von Atomformeln und

(3) S_i ist eine Menge von Formeln mit $at(S_i) \subseteq P^2$ für alle $i \in I$.

Die Elemente von P heißen Einheiten von T und die von P^2 Belegungen von T. Für alle $i \in I$ heiße das Syndrom S_i auch Syndrom von T. Jede Atomformel $\langle A,B \rangle$ aus P^2 soll gedeutet werden als die Aussage "A belegt B". (Die Relation P^2 kann auch als "Prädikat" für die Aussage "belegt" verstanden werden.)

Für die Einheiten A, B und C aus P bedeutet z.B. $\langle A,B \rangle \rightarrow \langle B,C \rangle$ dann "wenn A die Einheit B belegt, so belegt B die Einheit C". $\langle B,C \rangle \rightarrow \neg\langle C,B \rangle$ bedeutet "wenn B die Einheit C belegt, dann kann C nicht die Einheit B belegen", B und C können sich also nicht "gleichzeitig" gegenseitig belegen. Wenn auch A' aus P, dann ist $\langle A,B \rangle \wedge \langle A',B \rangle \rightarrow \langle B,C \rangle$ zu deuten als "wenn A und A' die Einheit B belegen, dann belegt B die Einheit C". $\langle A,C \rangle \wedge \langle A',C \rangle \rightarrow \neg\langle B,C \rangle$ bedeutet "wenn A und A' die Einheit C belegen, so kann B nicht

die Einheit C belegen".

Eine Lösung eines Syndroms S_i von T enthält Aussagen der Art "A belegt B" oder "A belegt nicht B" über die Einheiten A und B von T, die gleichzeitig mit den Aussagen aus S_i unter einer Bewertung gültig sind.

Die allgemeinen Lösungselemente eines Syndroms S_i sind Aussagen über Belegungen, die immer gültig sind, falls S_i gültig ist. Wenn <A,B> allgemeines Lösungselement von S_i und S_i gültig ist, so heißt das also, daß A "immer" die Einheit B belegen kann. Ist ¬<A,B> allgemeines Lösungselement von S_i und S_i gültig, so heißt das, daß A "nie" die Einheit B belegen kann.

Wenn <A,B> und <C,D> beide Elemente einer Äquivalenzklasse Q von $=_{S_i}$ sind und S_i gültig ist, dann bedeutet das, daß A die Einheit B genau dann belegen kann, wenn C die Einheit D belegen kann. Wenn <A,B> und ¬<C,D> beide in Q sind und S_i gültig ist, dann bedeutet das, daß A die Einheit B genau dann belegen kann, wenn C die Einheit D nicht belegen kann.

Sei S_1 = {<A,B> → <B,C>,<A',C> → <C,B>,<B,C> → ¬<C,B>}. S_1 ist äquivalent zu S_1' = {¬<A,B> ∨ <B,C>,¬<A',C> ∨ <C,B>,<B,C> ∨ ¬<C,B>}. Lösungen von S_1' und damit von S_1 sind {<A,B>,<B,C>,¬<A',C>,¬<C,B>} und {¬<A,B>,¬<B,C>,<A',C>,<C,B>}. Es kann also entweder A die Einheit B belegen und diese die Einheit C oder A' die Einheit C belegen und diese die Einheit B, damit die "Deadlock-Situation" <B,C> ∧ <C,B> vermieden wird.

Sei S_2 = {<A,B> → <B,C>,<B,C> → <C,D>,<C,D> → <D,B>,<A,B> → ¬<D,B>}. S_2 ist äquivalent zu S_2' = {¬<A,B> ∨ <B,C>,¬<B,C> ∨ <C,D>,¬<C,D> ∨ <D,B>,¬<A,B> ∨ ¬<D,B>}. S_2' hat die beiden Lösungen {¬<A,B>,<B,C>, <C,D>,<D,B>} und {¬<A,B>,¬<B,C>,¬<C,D>,¬<D,B>}. Das heißt, A kann nie B belegen.

Man beachte auch hier, daß die "Komplexität" von möglichen Bele-

gungsbedingungen nur durch die Anzahl "ihrer" Einheiten begrenzt ist.

Als viertes wird nun gezeigt, wie bei einem System von Einheiten, in dem auftretende Fehler sich von Einheit zu Einheit fortpflanzen und von testenden Einheiten entdeckt werden können, aus "Fehlerflußsituationen" und Testergebnissen Aussagen über möglicherweise fehlerhafte, d.h. defekte Einheiten zu erhalten sind.

Jede Einheit soll entweder fehlerhaft, d.h. defekt, oder nicht fehlerhaft, d.h. nicht defekt, sein können. Wenn eine Einheit defekt ist, dann soll der bei ihr auftretende Fehler sich fortpflanzen können, d.h. auch bei anderen Einheiten auftreten können, wobei das Auftreten eines Fehlers bei einer Einheit nicht die Defektheit dieser Einheit bedeuten soll. Auftretende Fehler sollen, bei den Einheiten, die sie verursachen, sowie bei den Einheiten, zu denen sie sich fortpflanzen, von Testeinheiten entdeckt werden können.

Solche Systeme können zum Beispiel Systeme von Prozessoren oder von Prozessen sein. Es können auch Programmsysteme sein, in denen sich Fehler entlang von "Flußdiagrammen" fortpflanzen können und in denen Programmelemente, zum Beispiel Prozeduren, von anderen Programmelementen, von Testelementen, getestet werden können.

Zu beachten ist, daß bei solchen Systemen in einem "Fehlerflußdiagramm" eine Einheit, zum Beispiel ein Prozessor, ein Prozess, eine Prozedur, ein Programmelement, an verschiedenen "Stellen" vorkommen kann, zum Beispiel ein Prozessor mehrfach benutzt, ein Prozess mehrfach aktiv, eine Prozedur mehrfach aufgerufen, ein Programmelement mehrfach benutzt werden kann.

$T = \langle P,K,e,W,D,F,\langle b_i \rangle_{i\in I} \rangle$ heiße Fehlerentdeckungssystem, falls gilt:

(1) P ist endliche Menge.

(2) K ist Teilmenge von P^2.

(3) e ist Abbildung auf P.

(4) W ist Menge von Elementen <P',K',e'> mit $P' \subseteq P$, $K' \subseteq P'^2$ und $e' = e|_{P'}$ (wobei $e|_{P'}$ die Einschränkung von e auf P' sei).

(5) D ist Injektion von e(P) und F Injektion von e^{-1} in die Menge der Atomformeln mit $im(D) \cap im(F) = \emptyset$. ($e^{-1}$ sei dabei das Inverse der Funktion e, also die Menge aller <A,p> mit <p,A> $\in$ e.)

(6) Für alle $i \in I$ ist b_i eine Relation zwischen W und der Menge fm der Formeln (also eine Menge von Elementen <s,a> mit s $\in$ W und a $\in$ fm).

Die Elemente von e(P) heißen Einheiten von T und die von W Fehlerflußsituationen von T. Die Injektionen D und F heißen Prädikate von T und für alle $i \in I$ heiße das Syndrom $b_i(W)$ (also die Menge der a mit <s,a> $\in b_i$) auch Syndrom von T.

<P,K> ist also ein gerichteter Graph und e eine Bewertung seiner Knoten mit Einheiten. <P,K,e> soll den "Fehlerfluß" zwischen den Einheiten von T beschreiben. W ist eine Menge von "Unterstrukturen" von <P,K,e>. <P,K,e> und jedes Element <P', K',e'> aus W ist also ein "Fehlerflußdiagramm".

Für jede Einheit A aus e(P) soll die Atomformel D(A) bedeuten "A ist defekt". Für jede Einheit A und jeden Knoten p soll die Atomformel F(A,p) bedeuten "es tritt ein Fehler bei A an der Stelle p auf".

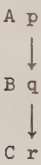
Eine Lösung eines Syndroms $b_i(W)$ von T enthält also Aussagen der Art "A ist defekt" oder "A ist nicht defekt" oder "es tritt eine Fehler bei A an der Stelle p auf" oder "es tritt keine Fehler bei A an der Stelle p auf", die gleichzeitig mit den Aussagen aus $b_i(W)$ unter einer Bewertung gültig sind.

Wenn eine Atomformel D(A) allgemeines Lösungselement eines erfüllbaren Syndroms $b_i(W)$ ist, so besagt dies, daß die Einheit

A "sicher" defekt ist, da D(A) in allen Lösungen von $b_i(W)$ vorkommt. Entsprechendes gilt für die Elementarformeln ¬D(A), F(A, p) und ¬F(A,p).

Wenn die Atomformeln D(A) und D(B) Elemente einer Äquivalenzklasse Q von $=_{b_i(W)}$ sind und $b_i(W)$ erfüllbar ist, dann bedeutet dies, daß A defekt ist genau dann, wenn B defekt ist. Entsprechendes gilt für die Elementarformeln ¬D(A), ¬D(B), F(A,p), F(B, q), ¬F(A,p) und ¬F(B,q).

Den Fehlerflußsituationen



sei durch b_i zugeordnet entweder

$$S_1 = \{\neg D(C) \rightarrow F(B,q), F(B,q) \rightarrow (D(B) \vee F(A,p)), \neg F(B,q) \rightarrow (\neg D(B) \wedge \neg F(A,p))\}$$

oder

$$S_2 = \{\neg D(C) \rightarrow \neg F(B,q), F(B,q) \rightarrow (D(B) \vee F(A,p)), \neg F(B,q) \rightarrow (\neg D(B) \wedge \neg F(A,p))\}$$

(Für eine Kante <p,q> eines gerichteten Graphen mit einer Bewertung des Knoten p mit A und einer Bewertung des Knoten q mit B wird auch

geschrieben.)

C kann als Testeinheit aufgefaßt werden, zu der sich entgegen der "Testrichtung" ein bei B auftretender Fehler fortpflanzen

kann.

S_1 und S_2 besagen unter anderem: Wenn bei B an der Stelle q ein Fehler auftritt und B nicht defekt ist, dann muß dieser Fehler auch schon bei A an der Stelle p auftreten. Wenn dagegen bei B an der Stelle q kein Fehler auftritt, so ist B nicht defekt und es kann bei A an der Stelle p kein Fehler auftreten.

S_1 ist äquivalent zu

$$\{D(C) \vee F(B,q), \neg F(B,q) \vee D(B) \vee F(A,p),$$
$$F(B,q) \vee \neg D(B), F(B,q) \vee \neg F(A,p)\}$$

und hat

$$\{\neg D(C), F(B,q), \neg D(B), F(A,p)\},$$

$$\{\neg D(C), F(B,q), D(B), \neg F(A,p)\},$$

$$\{\neg D(C), F(B,q), D(B), F(A,p)\}$$

als einzige Lösungen, die $\neg D(C)$ enthalten.

S_2 ist äquivalent zu

$$\{D(C) \vee \neg F(B,q), \neg F(B,q) \vee D(B) \vee F(A,p),$$
$$F(B,q) \vee \neg D(B), F(B,q) \vee \neg F(A,p)\}$$

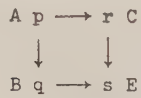
und hat

$$\{\neg D(C), \neg F(B,q), \neg D(B), \neg F(A,q)\}$$

als einzige Lösung, die $\neg D(C)$ enthält.

In diesen Lösungen von S_1 und S_2 werden keine Aussagen über Defektheit oder Nichtdefektheit der Einheit A gemacht. Man kann aber aus aus dem Auftreten eines Fehlers bei A an der Stelle p auf die Defektheit von A, also aus $F(A,p)$ auf $D(A)$ schließen. Da bei der betrachteten Fehlerflußsituation A nur an einer Stelle vorkommt, so kann hier aus $\neg F(A,p)$ auch auf $\neg D(A)$ geschlossen werden.

Den Fehlerflußsituationen



sei durch b_i zugeordnet

$$\{\neg D(E) \rightarrow \neg F(C,r), \neg D(E) \rightarrow F(B,q),$$
$$F(C,r) \rightarrow (D(C) \vee F(A,p)), \neg F(C,r) \rightarrow (\neg D(C) \wedge \neg F(A,p)),$$
$$F(B,q) \rightarrow (D(B) \vee F(A,p)), \neg F(B,q) \rightarrow (\neg D(B) \wedge \neg F(A,p))\}.$$

Dies ist äquivalent zu

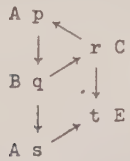
$$\{D(E) \vee \neg F(C,r), D(E) \vee F(B,q),$$
$$\neg F(C,r) \vee D(C) \vee F(A,p), F(C,r) \vee \neg D(C), F(C,r) \vee \neg F(A,p),$$
$$\neg F(B,q) \vee D(B) \vee F(A,p), F(B,q) \vee \neg D(B), F(B,q) \vee \neg F(A,p)\}$$

und hat

$$\{\neg D(E), \neg F(C,r), \neg D(C), F(B,q), D(B), \neg F(A,p)\}$$

als einzige Lösung, die $\neg D(E)$ enthält. (Hier kann E als Testeinheit aufgefaßt werden.)

Den Fehlerflußsituationen



sei durch b_i zugeordnet

$$S = \{\neg D(E) \rightarrow \neg F(C,r), \neg D(E) \rightarrow F(A,s),$$
$$F(C,r) \rightarrow (D(C) \vee F(B,q)), \neg F(C,r) \rightarrow (\neg D(C) \wedge \neg F(B,q)),$$
$$F(B,q) \rightarrow (D(B) \vee F(A,p)), \neg F(B,q) \rightarrow (\neg D(B) \wedge \neg F(A,p)),$$

$$F(A,s) \rightarrow (D(A) \vee F(B,q)), \neg F(A,s) \rightarrow \neg F(B,q),$$
$$F(A,p) \rightarrow (D(A) \vee F(C,r)), \neg F(A,p) \rightarrow \neg F(C,r)\}.$$

Man beachte, daß aus dem Nichtauftreten eines Fehlers bei A an der Stelle p oder s nicht auf die Nichtdefektheit von A geschlossen wird.

S ist äquivalent zu

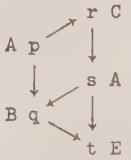
$$\{D(E) \vee \neg F(C,r), D(E) \vee F(A,s),$$
$$\neg F(C,r) \vee D(C) \vee F(B,q), F(C,r) \vee \neg D(C), F(C,r) \vee \neg F(B,q),$$
$$\neg F(B,q) \vee D(B) \vee F(A,p), F(B,q) \vee \neg D(B), F(B,q) \vee \neg F(A,p),$$
$$\neg F(A,s) \vee D(A) \vee F(B,q), F(A,s) \vee \neg F(B,q),$$
$$\neg F(A,q) \vee D(A) \vee F(C,r), F(A,p) \vee \neg F(C,r)\}$$

und hat

$$\{\neg D(E), \neg F(C,r), \neg D(C), \neg F(B,q), \neg D(B), F(A,s), D(A), \neg F(A,p)\}$$

als einzige Lösung, die $\neg D(E)$ enthält. (E kann als Testeinheit aufgefaßt werden.)

Den Fehlerflußsituationen



sei durch b_i zugeordnet

$$S = \{\neg D(E) \rightarrow F(B,q), \neg D(E) \rightarrow \neg F(A,s),$$
$$F(C,r) \rightarrow (D(C) \vee F(A,p)), \neg F(C,r) \rightarrow (\neg D(C) \wedge \neg F(A,p)),$$
$$F(B,q) \rightarrow (D(B) \vee F(A,s)), \neg F(B,q) \rightarrow (\neg D(B) \wedge \neg F(A,s)),$$
$$F(B,q) \rightarrow (D(B) \vee F(A,p)), \neg F(B,q) \rightarrow (\neg D(B) \wedge \neg F(A,p)),$$
$$F(A,s) \rightarrow (D(A) \vee F(C,r)), \neg F(A,s) \rightarrow \neg F(C,r)\}.$$

S ist äquivalent zu

$$\{D(E) \vee F(B,q), D(E) \vee \neg F(A,s),$$
$$\neg F(C,r) \vee D(C) \vee F(A,p), F(C,r) \vee \neg D(C), F(C,r) \vee \neg F(A,p),$$
$$\neg F(B,q) \vee D(B) \vee F(A,s), F(B,q) \vee \neg D(B), F(B,q) \vee \neg F(A,s),$$
$$\neg F(B,q) \vee D(B) \vee F(A,p), F(B,q) \vee \neg D(B), F(B,q) \vee \neg F(A,p),$$
$$\neg F(A,s) \vee D(A) \vee F(C,r), F(A,s) \vee \neg F(C,r)\}$$

und hat

$$\{\neg D(E), \neg F(C,r), \neg D(C), F(B,q), D(B), \neg F(A,s), \neg F(A,p)\}$$

als einzige Lösung, die $\neg D(E)$ enthält. (E kann als Testeinheit aufgefaßt werden.)

Man beachte, daß die "Komplexität" möglicher Fehlerflußsituationen und ihnen zugeordneter Formeln nur durch die Anzahl "ihrer" Einheiten begrenzt ist.

Nachwort

An diese Arbeit könnte und sollte sich Folgendes anschließen.

Die Effektivität der in den Abschnitten 2 bis 5 angegebenen Kalküle sollte untersucht, ihre Komplexität abgeschätzt werden, eventuell für bestimmte "Input-Situationen". Dabei sollte überlegt werden, ob nicht Modifikationen dieser Kalküle gefunden werden können, die besser, d.h. effektiver als die angegebenen sind.

Zu untersuchen wäre auch, ob für die Behandlung weiterer hier nicht bearbeiteter Probleme geeignete Kalküle gefunden werden können.

Ferner könnte überlegt werden, welche Bedingungen für die Menge der logischen Syndrome eines sich selbst testenden Systems, man vergleiche Abschnitt 6, gelten müssen, damit diese Syndrome bestimmte Eigenschaften erfüllen, zum Beispiel jedes von ihnen genau eine Lösung mit höchstens n defekten Einheiten hat, dieses System also "n-diagnostizierbar" ist. Dabei sollten auch zu Problemen Überlegungen angestellt werden, die mit "Reperatur" oder "Erneuerung" zusammenhängen. Für "Preparata-Modelle" sich selbst testender Systeme, man vergleiche die Einleitung, werden derartige Probleme zum Beispiel behandelt bei M. Dal Cin 1979, M. Malek und K.Y. Liu 1979, S.L. Hakimi und A.T. Amin 1974, F.J. Allan, T. Kameda und S. Toida 1975, J.D. Russel und C.R. Kime 1975 und U. Manber 1980.

Zwei Bereiche, in denen Diagnoseprobleme in der hier dargestellten Weise mit Mitteln der mathematischen Logik behandelt werden können, sollten wegen ihrer besonderen Aktualität weiter untersucht werden, nämlich (1) die Steuerung und Verwaltung des Betriebs von Vielprozessorsystemen und (2) die Fehlerentdeckung und Fehlerlokalisation in Software-Systemen.

Zu (1): Die im Abschnitt 6 aufgezeigten Ansätze sollten weiter

vertieft werden. Zu überlegen wäre, welche Möglichkeiten der Beschreibung mittels logischer Syndrome für die beim Betrieb von Vielprozessorsystemen auftretenden Probleme es außer den hier erwähnten gibt. Vorstellen könnte man sich eine einheitliche Art der Problembeschreibung, die im wesentlichen auf "Prädikate" beruht, die den Einheiten zugeordnet werden können. Dies könnte die Möglichkeit einer einheitlichen Behandlung einiger Betriebsprobleme bei Vielprozessorsystemen eröffnen.

Zu (2): Zur Behandlung des Problems, in Software-Systemen auftretende Fehler zu entdecken und fehlerhafte, d.h. defekte Elemente zu lokalisieren, ist eine Synthese der Beschreibungsmethoden bei sich selbst testenden Systemen und bei Fehlerentdeckungssystemen denkbar. Dazu sollten Testproceduren außer auftretende Fehler zu entdecken auch die Fehlerhaftigkeit, d.h. Nichtrichtigkeit, von Programmelementen feststellen können. Wichtig wäre bei diesem Problemkreis zunächst eine genaue Untersuchung der in einem Programmsystem möglichen "Fehlersituationen".

Nicht zuletzt sollten die gefundenen Kalküle und Problembehandlungsmethoden "experimentell" erprobt werden. Das heißt, die Kalküle sollten in geeignete Prozeduren übersetzt und mit diesen dann Beispiele "gerechnet" werden, die Diagnoseprobleme sollten mittels geeigneter Programme simuliert werden.

Literaturverzeichnis

M. Adham and A.D. Friedman: Digital System Fault Diagnosis. J. Design Automation and Fault Tolerant Computing, Vol. 1, pp. 115-132, 1977

F.J. Allan, T. Kameda and S. Toida: An Approach to the Diagnosability Analysis of a System. IEEE Trans. on Computers, Vol. C-24, pp. 1040-1042, 1975

R. Anderson and W.W. Bledsoe: A Linear Format for Resolution With Merging and a New Technique for Establishing Completeness. J. ACM, Vol. 17, pp. 525-534, 1970

C.L. Chang and R.C.T. Lee: Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. New York, 1973

M. Dal Cin: Fehlertolerante Systeme. Stuttgart, 1979

A.D. Friedman and L. Simoncini: System-Level Fault Diagnosis. Computer, Vol. 13, pp. 47-53, 1980

S.L. Hakimi and A.T. Amin: Characterization of Connection Assignment of Diagnosable Systems. IEEE Trans. on Computers, Vol. C-23, pp. 86-88, 1974

H. Hermes: Einführung in die mathematische Logik. Stuttgart, 1976

D. Hilbert und W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin, 1972

M. Malek and K.Y. Liu: Graph Theory Models in Fault Diagnosis and Fault Tolerance. J. Design Automation and Fault Tolerant Computing, Vol. 3. pp. 155-169, 1979

U. Manber: System Diagnosis with Repair. IEEE Trans on Computers, Vol. C-29, pp. 934-937, 1980

R.S. Pierce: Introduction to the Theory of Abstract Algebras. New York, 1968

F.P. Preparata, G. Metze and R.T. Chien: On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems. IEEE Trans. on Electronic Computers, Vol. EC-16, pp. 848-854, 1967

L. Richter: Betriebssysteme. Stuttgart, 1977

M.M. Richter: Logikkalküle. Stuttgart, 1978

J.A. Robinson: A Machine-Oriented Logic Based an the Resolution Principle. J. ACM, Vol. 12, pp. 23-41, 1965

J.D. Russel and C.R. Kime: System Fault Diagnosis: Closure and Diagnosability with Repair. IEEE Trans. on Computers, Vol. C-24, pp. 1078-1080, 1975

H. Zima: Betriebssysteme. Mannheim, 1976

Lebenslauf

Geboren am 6.7.1938 in Brüsau. Schulbesuch bis 1953, dann Ausbildung und Tätigkeit als Kartograph.

1965 Externen-Abitur. Ab 1966 Studium der Mathematik, Physik und später Informationsverarbeitung an der Universität Tübingen. Ab 1969 Beschäftigung als wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität Tübingen, hauptsächlich am Zentrum für Datenverarbeitung.

1977 Diplomprüfung in Mathematik. Von 1977 bis 1980 wissenschaftlicher Angestellter an der Universität Tübingen, beschäftigt mit praktischen Aufgaben der Informationsverarbeitung.

Von 1978 bis 1980 Anfertigung der Dissertation "Über die Behandlung von Diagnoseproblemen mit Mitteln der mathematischen Logik" unter Leitung von Herrn Prof. M. Dal Cin.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren M. Dal Cin, U. Felgner, W. Felscher, W. Güttinger, H. Krüger, M.M. Richter, H. Schaefer, H. Wielandt und K. Zeller.

Druck und Gesamtherstellung:

Bölk & Schulz · Kopier- und Drucktechnik
Bismarckstr. 92
7400 Tübingen · Tel. 07071/32321